

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

École Doctorale
Sciences et Technologies

Laboratoire de Traitement de l'Information
et la Communication



N° d'ordre 250

Thèse Présentée

Par Abdoulaye SERE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Ouagadougou

Option Sciences Appliquées

Spécialité : Informatique

Transformations Analytiques appliquées aux Images multi-échelles et bruitées

Soutenue le 21 juin 2013 devant le jury composé de :

Président : - Hamidou TOURE, Professeur Titulaire, Université de Ouagadougou.

Membres : - Eric ANDRES, Professeur des Universités, Université de Poitiers.

- Y. M. Théodore TAPSOBA, Professeur Titulaire (Rapporteur), Université
Polytechnique de Bobo-Dioulasso.

- Gérard KIENTEGA, Maître de Conférences (Rapporteur), Université de
Ouagadougou.

- Oumarou SIE, Maître de Conférences (Directeur de thèse), Université de
Ouagadougou.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à l'endroit de mes encadreurs. D'abord au Professeur Oumarou SIÉ de l'Université de Ouagadougou, mon directeur de thèse, pour avoir accepté m'accueillir dans son laboratoire et me permettre de réaliser cette thèse. Ensuite au Professeur Eric ANDRÈS de l'Université de Poitiers, qui m'a fait découvrir la beauté de la Géométrie Discrète et m'a toujours apporté son encadrement depuis l'obtention de mon DEA en Informatique. Je leur suis très reconnaissant de m'avoir apporté autant de leurs expériences durant ce parcours.

Un grand merci au Professeur Horia F. POP de l'Université Babès Bolyai, qui a accepté être mon superviseur pendant le déroulement des stages de recherche doctorale à la Faculté de Mathématiques et Informatique de l'Université Babès Bolyai. Il a mis à ma disposition le cadre de travail adéquat avec une marge d'autonomie que j'ai beaucoup apprécié. Il a toujours été disponible à l'écoute de mes demandes et de mes questions.

“ Apprendre les mathématiques ” est beau, “ suivre des exposés de Mathématiques en langue Roumaine ” demande un autre effort. Merci au Professeur Dorin ANDRICA pour m'avoir intégrer dans son équipe de géométrie analytique et mettre à ma disposition son bureau et sa documentation en Mathématiques. Je voudrais l'assurer que j'ai appris quelques mots roumains. Je n'oublie pas notre longue marche dans les rues de Cluj Napoca, lors de notre première rencontre.

Je tiens à remercier le Professeur Sado TRAORÉ de l'Université Polytechnique de Bobo-Dioulasso, qui m'a prodigué autant de conseils à travers son expérience pendant mon DEA en Informatique et avant d'entamer cette thèse.

Madame Anca TEODORESCU, responsable du centre de coopération de l'Université Babès Bolyai, m'a toujours apporté son soutien pour l'obtention du titre de séjour en Roumanie. Je voudrais lui exprimer ma gratitude.

Cette thèse a bénéficié également du soutien de l'Agence Universitaire de la Francophonie, de l'Université de Ouagadougou et de l'Université Babès Bolyai. Je leur exprime ma reconnaissance. Notamment à Madame Fabare SANE, assistant de programme au Bureau régionale de l'Agence

Universitaire de la Francophonie de l'Afrique de l'Ouest au Sénégal, qui a été mon interlocuteur au Sénégal. Vous avez introduit mes dossiers de demande de visa à l'ambassade de Roumanie au Sénégal, à chaque fois que j' en ai fait la demande, pendant les trois années de thèse. Je n'oublie pas l'effort que vous avez fourni à mon égard, pour m'appuyer dans l'obtention du visa Roumain. Qu'elle trouve ici l'expression de mes sincères salutations distinguées. A Madame Dana GEORGESCU, assistant de programme au Bureau régionale de l'Agence Universitaire de la Francophonie de l'Europe de l'Est à Bucarest, j'adresse mes remerciements pour l'accueil et vos conseils de mon arrivée à Bucarest jusqu'à mon départ pour Cluj-Napoca. Vous avez toujours été disponible pour répondre à mes questions relatives à la vie en Roumanie.

Je me rappelle également des moments d'échanges et d'expériences diverses avec mes collègues thésards et postdoctorants de Cluj Napoca, de IAIS, de Bucarest, Sinclair, Emmanuel, Diagana, Bemba. Je leur adresse mes remerciements pour leur amitié d'avoir contribué à me rendre plus sociable.

Pendant, les trois années de thèse, j'ai travaillé à côté de collègues sympathiques et chaleureux du Laboratoire de Traitement de l'information et de la communication de l'Université de Ouagadougou. A Didier BASSOLÉ, Amadou CHAIBOU, Frédérique OUÉDRAOGO, Boureima ZERBO et Téléphore TIENDRÉBÉOGO : nous avons eu le même but “ soutenir une thèse en informatique ” à un moment donné . J'ai apprécié vos analyses, vos conseils, vos idées critiques sur mes présentations lors des journées portes ouvertes des doctorants de l'Université de Ouagadougou. Je leur adresse mes remerciements pour leur amitié.

A l'attention de Ingue PAULINI, Alpha SOW, mes amis de Cluj Napoca, je me rappelle des promenades en campagne qui ont été des moments de repos et de relâchement. Vous m'avez permis de comprendre la vie et la culture roumaine, soyez en remercier.

Mon père, ma mère, mes frères Ousmane, Yacouba, Issoufou, Karim, mes soeurs Maïmouna, Mariam, ma chérie Batorma m'ont soutenu pendant cette longue période d'études. Leur amour et leurs encouragements ont été une source de motivation et d'énergie pour pouvoir avancer dans ce travail. Sans eux je ne serai pas arrivé à ce stade.

Abstract

This thesis deals with the ability to recognize analytic discrete objects. The proposed method is based on changes adapted to a multiscale and noisy picture environment by taking the characteristics of analytic hyperplanes and hyperspheres into account. For this reason an analysis of discrete contours representing models and a set of Hough Transform based methods were shown with sometimes a descriptive view or sometimes a critical view for further researches. Hough Transform is a classic method of shape recognition in noisy picture based on an image space and parameters space. Martine Dexet, in her thesis in 2006, proposed an extension of this method by using hyperplane recognition. In this thesis, we extend Martine Dexet's works to propose a definition of the dual of some geometric shapes resulting in a problem of linear programming and to establish the intersection of analytic hyperplanes. Then, we give an application of the Generalized Bisector for the recognition of analytic arcs and analytic circles. Finally, we establish a new method of analytic line recognition by the definition of Hough Transform Standard.

keywords : digital geometry, Hough transform, generalized bisector, reconstruction

Résumé

Cette thèse porte sur la reconnaissance d'objets discrets analytiques. La méthode proposée est basée sur des transformations analytiques adaptées à une image bruitée et multi-échelle, par la prise en compte des caractéristiques des hyperplans et des hypersphères analytiques. Pour cette raison, une analyse des modèles de représentation des contours discrets et un ensemble de méthodes basées sur la transformée de Hough ont été exposés avec un regard tantôt descriptif, tantôt critique pour entrevoir des pistes de recherche. La transformée de Hough est une méthode classique de reconnaissance de formes dans une image bruitée basée sur un espace image et un espace de paramètres. Martine Dexet a proposé une extension de cette méthode, en s'intéressant à la reconnaissance des hyperplans analytiques dans sa thèse en 2006. Dans ce sens, cette thèse étend d'abord les travaux de Martine Dexet et propose une définition du dual de certaines formes géométriques qui se ramène à un problème de programmation linéaire, ainsi que l'analyse de l'intersection des hyperplans analytiques. Cette thèse fournit ensuite une application de la médiatrice généralisée dans le cadre de la reconnaissance des arcs ou des cercles analytiques. Enfin, il est également établi dans cette thèse, une nouvelle méthode de reconnaissance de droites analytiques qui s'appuie sur la définition de la transformée de Hough Standard.

Mots clés : géométrie discrète, transformée de Hough, médiatrice généralisée, reconstruction.

Table des matières

Introduction générale	4
1 Contours discrets et transformations analytiques	8
1.1 Introduction	8
1.2 Etapes de la reconnaissance de forme	9
1.3 Concepts de formes discrètes	10
1.3.1 Espace discret et pavés	10
1.3.2 Contours discrets	26
1.4 Reconnaissance de Formes discrètes	55
1.4.1 Reconnaissance de droites	56
1.4.2 Reconnaissance du cercle	65
1.4.3 Reconnaissance de formes quelconques	67
1.5 Reconstruction	69
1.6 Conclusion	70
2 Discrétisation et extension du dual d'un pixel	71
2.1 Introduction	71
2.2 Problème avec la discrétisation analytique	72
2.3 Courbes discrètes bruitées	74

2.3.1	Hyperplans analytique bruités et hypersphères analytique bruitées	82
2.3.2	Pavés bruités pour la redéfinition des primitives discrètes par subdivision . . .	84
2.4	Epaisseur des hyperplans analytiques et dual d'un pixel	87
2.5	Extension du dual d'un pixel	88
2.5.1	Duals de quelques formes géométriques	88
2.5.2	Préimage des formes géométriques	98
2.5.3	Propriétés de la préimage généralisée	99
2.6	Intersection des hyperplans analytiques	102
2.6.1	Concepts	102
2.6.2	Description de la méthode	103
2.6.3	Algorithme de reconnaissance	111
2.7	Conclusion	112
3	Reconnaissance de cercles analytiques discrets	114
3.1	Introduction	114
3.2	Reconnaissance de cercles analytiques bruités	115
3.2.1	Transformée de Hough étendue au cercle analytique	115
3.2.2	Définition de la médiatrice généralisée de deux régions	117
3.2.3	Propriétés de la médiatrice généralisée de deux régions	122
3.2.4	Exemples de médiatrice de deux régions	124
3.2.5	Reconnaissance du cercle analytique	127
3.2.6	Conception informatique	132
3.3	Médiatrices de pavés bruités	133
3.4	Conclusion	134

4	Reconnaissance de droites analytiques et reconstruction polynomiale	135
4.1	Introduction	135
4.2	Transformée de Hough standard étendue	136
4.2.1	Dual d'un segment	136
4.2.2	Dual d'un pixel	138
4.2.3	Analyse du dual d'un pixel	143
4.2.4	Approximation du dual d'un pixel	147
4.2.5	Préimage de pixels	150
4.2.6	Conception informatique	154
4.3	Autres pavés	154
4.4	Reconstruction polynomiale	157
4.5	Conclusion	160
	Conclusion générale	161
	Annexes	163
	Liste des algorithmes	171
	Liste des tableaux	172
	Table des figures	173
	Publications personnelles	180
	Bibliographie	181

Introduction générale

L'image numérique est utilisée pour analyser un phénomène, pour prendre une décision dans des domaines comme l'imagerie médicale, la cartographie, la géologie et l'agronomie. Dans cette optique, l'image numérique contient des informations variées qu'il est nécessaire de traiter en vue de mettre en lumière certaines caractéristiques des données utiles pour l'analyse, l'interprétation et la décision. A titre d'exemple, en imagerie médicale, nous pouvons être intéressés par certaines formes ou certaines colorations apparaissant dans une image dans le but de détecter une tumeur. En radiographie, nous obtenons des images montrant des parties du corps humain tels qu'un bras, une jambe, en vue de détecter une fracture ou plus généralement une maladie. De même, en cartographie, la détection des routes du réseau routier[120], correspond à la reconnaissance de droites discrètes parallèles dans des images aériennes. Enfin, en agronomie, nous avons besoin d'extraire des informations sur les limites des surfaces cultivées, de calculer des aires et de reconnaître un cours d'eau.

Ces images numériques acquises par divers capteurs, peuvent contenir également des objets qui ne sont pas bien représentés à cause de l'environnement naturel et de la résolution des capteurs. Cela nécessite de faire des traitements d'amélioration de la qualité des images numériques et d'extraction d'objets particuliers. L'objectif de notre étude est d'analyser les images pour les rendre plus nette ou plus précisément la reconnaissance de formes géométriques à l'aide de transformations adaptées à une image bruitée et multi-échelle. Une image bruitée est une image où l'intensité des éléments structurants a été modifiée par un élément extérieur comme l'environnement naturel et les capteurs. Une image multi-échelle est une image où les éléments structurants[41] sont représentés à des résolutions différentes. Plusieurs techniques de découpage du plan ou de l'espace, telles que les transformations quasi-affines[80, 81], le diagramme de Voronoï[83], la triangulation de Delaunay[83], les arbres kd-tree[41] ont été proposées pour représenter les éléments de base d'une image dans ce sens.

Il apparaît alors essentiel d'établir des modèles des objets à détecter, qui prennent en compte une description des bruits apparaissant dans les images numériques. Dans ce sens, la géométrie discrète

[122, 113]apporte une base de concepts s'inspirant de la géométrie euclidienne. Plusieurs modèles ont été définis notamment les hyperplans et les hypersphères analytiques[15, 86, 113]. Plusieurs applications de ces modèles ont également été faites en visualisation[103], en imagerie médicale[104], en chirurgie assistée par ordinateur[105], en tracé de rayon discret[106] et en tracé de courbe discrète par simulation [107]. Marzieh. Savoj et al.[110] ont également réalisé une localisation de l'iris utilisant le modèle de cercle discret.

De plus, la définition de méthodes est nécessaire pour aboutir à la reconnaissance de ces objets. En 1962, Paul Hough[20] a introduit une méthode appelée la transformée de Hough, définie dans un espace continu. Elle a été adaptée à l'espace discret pour permettre la reconnaissance de droites discrètes[97] dans une image bruitée. Pendant plusieurs années, les chercheurs ont établi plusieurs variantes[2, 3, 5, 72, 8, 13, 17, 22, 23, 24, 25, 26, 43, 44, 69, 98, 112, 120] de cette méthode. Notamment, elle a été utilisée en vue de résoudre la reconnaissance d'autres formes comme le cercle[13, 72, 127], l'ellipse[22, 23, 24, 25, 76] et des formes quelconques[4][5]. Certaines méthodes[69, 99, 100, 101] proposent une optimisation de la complexité temporelle, de la mémoire requise et une amélioration de la détection.

Pendant longtemps, la technique utilisée pour adapter la transformée de Hough à l'espace discret a été la quantification de l'espace de paramètres[125]. Un panorama de la transformée de Hough a été établi par Henri Maître[9]. En 2006, Martine Dexet dans sa thèse[1] a étendue la transformée de Hough, en proposant des méthodes analytiques non basées sur la quantification de l'espace de paramètres, permettant la reconnaissance des droites discrètes naïves et standard.

Dans cette thèse, nous nous penchons sur les aspects suivant :

- Quels sont les éléments de description de contours discrets notamment d'une droite bruitée, d'un cercle bruité ?. Quelles sont les méthodes de reconnaissance de formes géométriques ? Comment étendre les algorithmes d'approximation polynomiale de Lagrange et Newton[133] pour obtenir une méthode de reconstruction polynomiale ?
- Martine Dexet a introduit une notion de dual dans sa thèse [1]. Comment appliquer ce dual à d'autres formes géométriques pour obtenir la reconnaissance d'autres droites analytiques discrètes ? Comment étendre ce dual pour déterminer l'intersection des droites analytiques discrètes ?
- Comment établir la reconnaissance du cercle analytique discret et plus généralement de l'hypersphère analytique ?

- Comment établir la reconnaissance des droites discrètes analytiques 2D avec la transformée de Hough standard[7] ?

Le présent document est composé de quatre chapitres :

- Le premier chapitre fait un état de l'art des éléments de description d'un contour discret, des transformations adaptées à la reconnaissance de droites discrètes, de cercles discrets dans un environnement bruité, avec un regard critique de temps à autre pour dégager des pistes de recherches. Certaines pistes de recherche seront étudiées brièvement dans le deuxième chapitre, d'autres par contre constitueront le troisième et le quatrième chapitre ;
- Le deuxième chapitre définit notre conception d'une forme discrète bruitée. Il présente notre apport en terme d'extension du dual d'un pixel, en déterminant le dual de certaines formes géométriques dans le cadre d'autres grilles nécessaires en simulation ou en tracé de rayons. Ce chapitre propose une méthode de reconnaissance d'intersection d'hyperplans analytiques.
- Le troisième chapitre présente une application de la médiatrice généralisée, pour assurer la reconnaissance de cercles analytiques, des hyperpshères analytiques discrètes. La section 3.2 de ce chapitre a été l'objet d'un article accepté par la conférence internationale Comp'Image 2010 [126] ;
- Le quatrième chapitre réalise une extension de la transformée de Hough standard, dans le cadre de la reconnaissance de droites analytiques discrètes. Ce chapitre a été l'objet d'un article accepté par la conférence internationale SETIT 2012 et publié à l'International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA)[31].

La figure 1 montre l'organisation des chapitres et des liens qui existent entre eux. Elle représente un chapitre par un rectangle, une grande idée correspondant à un grand axe par une ellipse colorée.

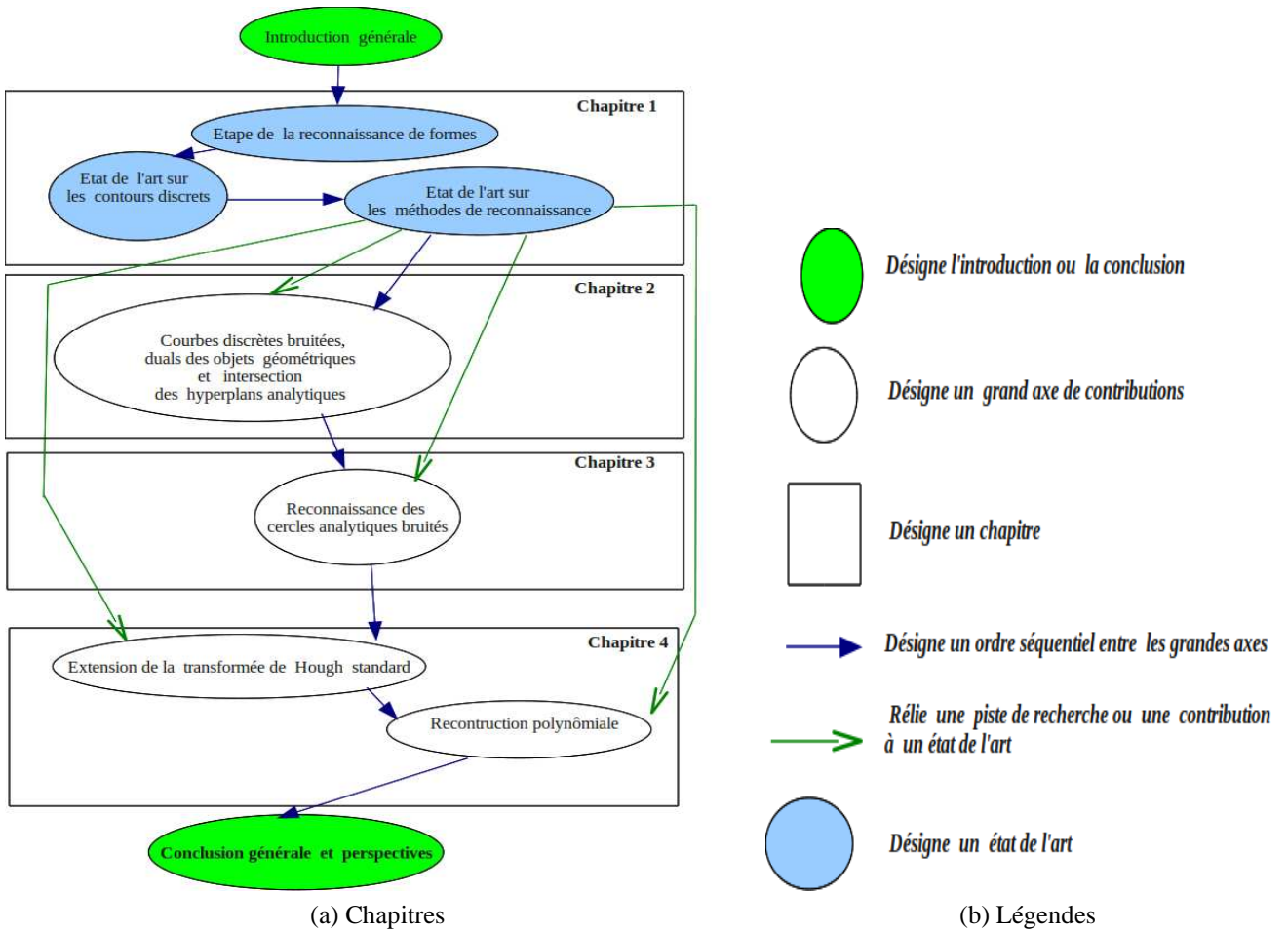


FIGURE 1 – Organisation des chapitres

Chapitre 1

Contours discrets et transformations analytiques

Sommaire

1.1	Introduction	8
1.2	Etapas de la reconnaissance de forme	9
1.3	Concepts de formes discrètes	10
1.3.1	Espace discret et pavés	10
1.3.2	Contours discrets	26
1.4	Reconnaissance de Formes discrètes	55
1.4.1	Reconnaissance de droites	56
1.4.2	Reconnaissance du cercle	65
1.4.3	Reconnaissance de formes quelconques	67
1.5	Reconstruction	69
1.6	Conclusion	70

1.1 Introduction

Ce chapitre présente un état de l'art des modèles d'une courbe et d'une surface discrète.

Ce chapitre fait également le point sur la transformée de Hough adaptée à la reconnaissance des droites discrètes et des cercles discrets dans une image bruitée. Les limites de ces méthodes sont

également présentées.

Dans la section 1.2, nous commençons par décrire les étapes de la reconnaissance de formes, avant de présenter dans la section 1.3 des modèles de contours discrets et de terminer par des méthodes de reconnaissance de formes dans la section 1.4.

1.2 Etapes de la reconnaissance de forme

Une image numérique est une image binaire obtenue par divers procédés d'acquisition : cela peut se faire à l'aide de capteurs tels que les appareils photonumériques et les caméscopes ou, par une synthèse d'images avec des logiciels de traitement d'images.

La figure 1.1 montre un schéma décrivant les étapes de la reconnaissance de formes : l'acquisition, la détection de contours et la reconnaissance de formes géométriques. Cela met en évidence l'importance du choix des outils nécessaires pour réaliser les traitements à chacune de ces étapes.

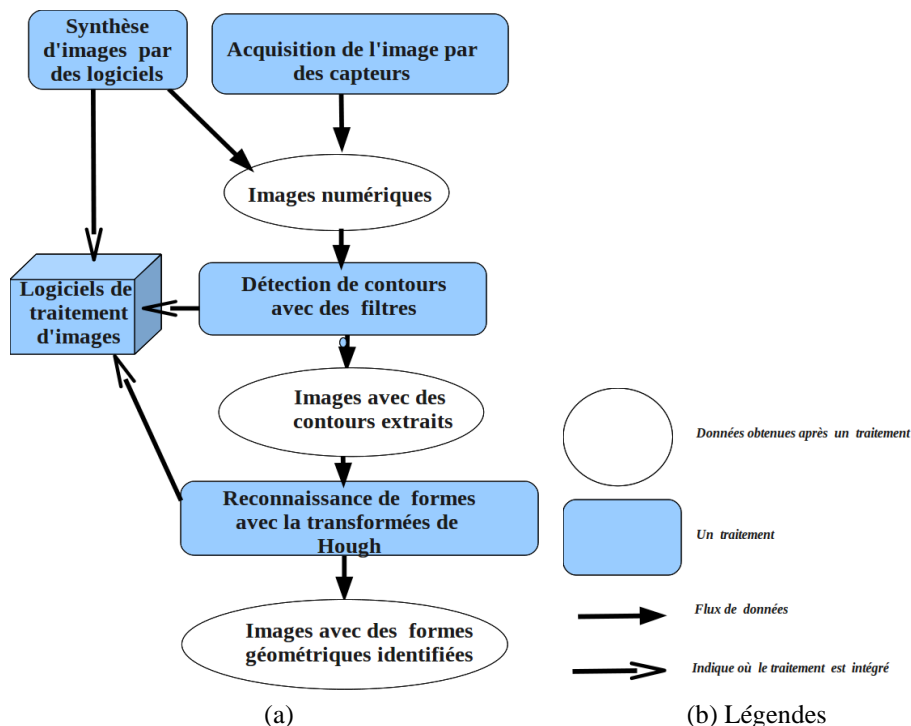


FIGURE 1.1 – Étapes de la reconnaissance de formes

Les phénomènes comme le vent, le brouillard, la pluie, la résolution peuvent altérer la qualité des images. Certains phénomènes sont illustrés en annexe. L'identification d'une forme géométrique

dans une image nécessite l'établissement des invariants de cette forme. Quels sont les modèles de description d'une courbe ou d'une surface discrète ? C'est l'objet de la section suivante.

1.3 Concepts de formes discrètes

La forme est une caractéristique d'une image. La modélisation de la forme est nécessaire pour permettre la reconnaissance.

Une image numérique est constituée de points lumineux qui forment une certaine structure permettant de distinguer des sous-ensembles d'images.

En géométrie euclidienne, un plan est composé d'un ensemble infini de points continus en dimension 2. Une image numérique est une partie d'un plan.

Définition 1. (Densité d'une image) La densité d'une image numérique définit le nombre de points lumineux sur une surface donnée.

De plus, la définition d'une résolution et de la taille d'une image conduit à un ensemble fini de points lumineux.

La géométrie discrète fournit une base de modèles pour l'étude et la manipulation des images numériques. La définition de ces modèles permettra également d'établir des algorithmes de transformations.

Quels sont les modèles de description d'une image numérique ? quel est l'impact des modèles de description ?

1.3.1 Espace discret et pavés

La géométrie euclidienne¹ fournit une base d'axiomes qui constitue une base d'étude de la géométrie discrète², aboutissant à des lois propres au discret. L'espace discret comme l'espace euclidien \mathbb{R}^n peut également être vu sur plusieurs dimensions 2, 3, n engendrant des définitions et des propriétés.

1. L'étude des éléments géométriques tels que les points, les droites, les plans, les relations entre eux ont été introduits pour la première fois par Euclide dans son livre célèbre "Elements" du troisième au quatrième siècle avant Jésus Christ. D. Hilbert(1862-1943) dans "les fondamentaux de la géométrie" a établi des axiomes de la géométrie euclidienne. D'autres axiomes de la géométrie euclidienne ont été établis par G.D.Birkoff(1884-1944) et H.Weyl(1885-1955) en 1917[123].

2. La géométrie analytique étudie les objets géométriques en utilisant le système de coordonnées[123].

Espace discret

L'espace discret se déduit de l'espace euclidien par la définition :

Définition 2. (Espace discret) *Un espace discret est un sous-ensemble de points isolés de l'espace euclidien \mathbb{R}^n .*

L'espace discret est un modèle associé à une image numérique. Tout traitement défini sur l'image correspond à un traitement sur le modèle, l'espace discret. En analyse d'image par ordinateur, nous travaillons avec des images discrètes de taille finie, l'espace discret est borné. L'analyse de l'image à l'aide d'autres modèles comme les graphes[74] est possible en perspective. La figure 1.2 montre un plan composé de pavés rectangulaires et d'objets continus en dimension 3, générés avec le logiciel POV-RAY³.

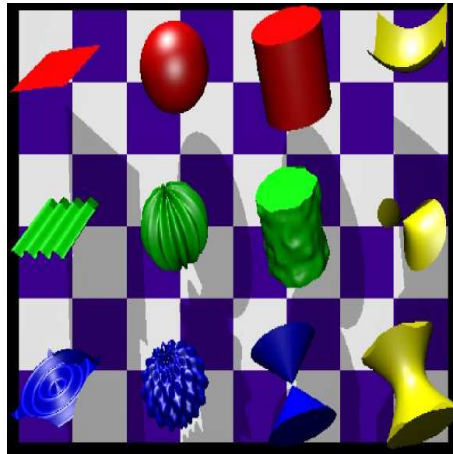


FIGURE 1.2 – Plan et espace (Image générée avec POV-RAY)

Les notions d'espace et de pavé sont liées. Un pavé est un sous ensemble d'un espace.

Définition 3. (Pavé) *Un pavé est un composant élémentaire d'un espace.*

Tandis que l'espace est une partie pavable.

Définition 4. (Partie pavable de \mathbb{R}^2 [124]) *Une partie pavable de \mathbb{R}^2 est toute réunion d'un nombre fini de pavés fermés et bornés de \mathbb{R}^2 .*

Cette conception d'une partie pavable peut s'appliquer à \mathbb{R}^n .

Nous associons à la notion de point lumineux de l'image, la notion de point discret ou de pavé comme étant son modèle.

3. POV-RAY : Persistence of Vision Ray-Tracer (POV-Ray). POV-RAY est un logiciel de synthèse d'images.

Les figures 1.3a, 1.3b et 1.3c montrent respectivement des pavés non uniformes hexagonaux, des pavés triangulaires imbriqués et des pavés parallélogrammatiques⁴.

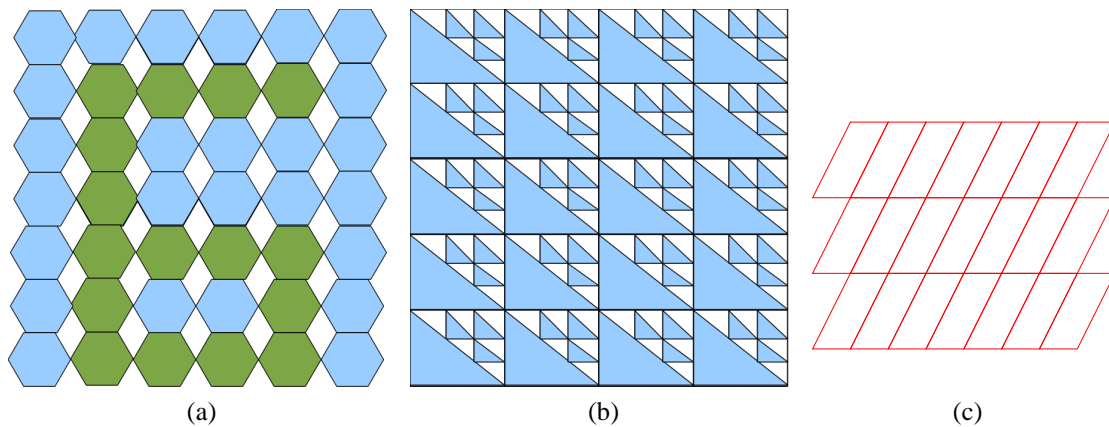


FIGURE 1.3 – Pavés non uniformes

Ils existent deux groupes de pavés : lorsque les pavés ne sont pas uniformes c’est à dire qu’ils n’ont pas la même taille, ils sont appelés “pavés irréguliers” ; dans le cas où les pavés sont identiques, ils sont appelés “pavés réguliers”.

Pavés réguliers

Les pavés réguliers sont couramment utilisés, particulièrement les pavés carrés qui sont communs aux capteurs et aux écrans d’ordinateurs. Certains capteurs implémentent des pavés triangulaires, des pavés hexagonaux ou des pavés rectangulaires. Les pavés rectangulaires concernent certains capteurs qui n’ont pas la même résolution ligne et colonne.

Quant aux pavés hexagonaux, ils sont utilisés par des écrans de télévision pour améliorer le rendu de l’image, notamment l’anti-aliasage⁵.

La figure 1.4 met en évidence certains pavés : nous avons des pavés rectangulaires en 1.4a, des pavés hexagonaux en 1.4b, et des pavés triangulaires en 1.4c. Dans le cas de pavés hexagonaux, un pavé possède au maximum 6 voisins, tandis que dans le cas de pavé carré un pavé a 8 voisins au maximum. Dans le cas de pavé triangulaire, un pavé a au maximum 12 voisins. Dans ces exemples, des pavés touchés par des courbes continues ont été sélectionnés.

4. Des pavés qui ont la forme d’un parallélogramme

5. Les tracés de segments vont apparaître des “escaliers” lorsque la pente est proche de la verticale. Les techniques d’anti-aliasage consistent à réduire cet effet d’escalier. Par exemple, l’augmentation de la résolution de l’image réduit l’effet d’escalier.

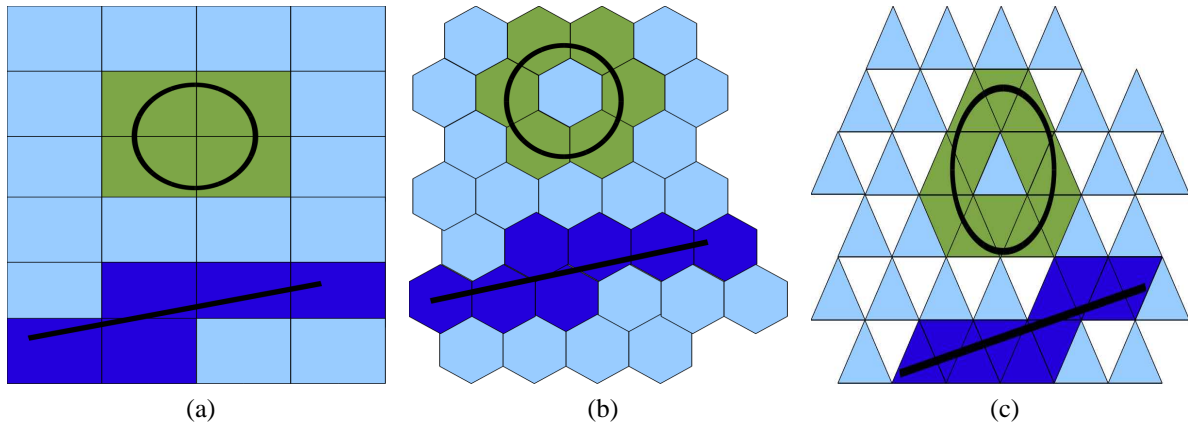


FIGURE 1.4 – Pavage régulier

Une grille régulière est un espace discret où les pavés sont identiques.

Plusieurs conceptions d'un point discret dans le cas de grilles régulières sont envisageables :

- la première est de considérer un point discret comme étant un élément de \mathbb{Z}^n . Dans cette conception, les points discrets sont équidistants des uns et des autres pour assurer cette régularité. La distance euclidienne entre deux points discrets doit être inférieure à un seuil acceptable pour permettre une meilleure représentation des objets discrets. Dans la figure 1.5, nous avons une illustration des points discrets avec \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 .

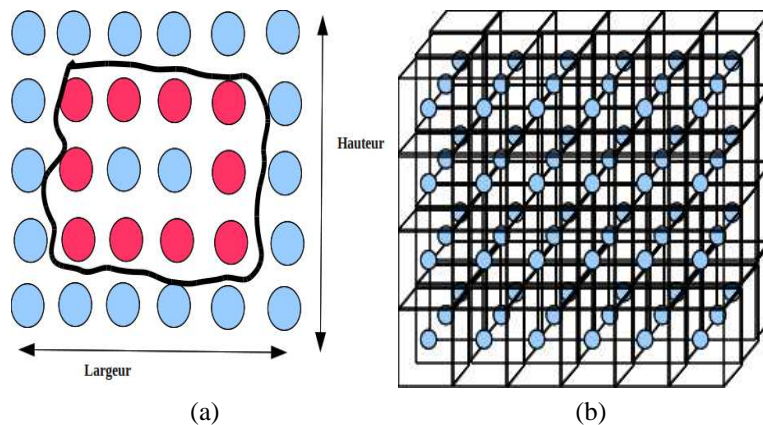


FIGURE 1.5 – Points discrets en dimension 2 en 1.5a et en dimension 3, en 1.5b

- la seconde est de considérer le point discret comme un hypervoxel, un cas particulier d'un 1-hypercube : un point discret désigne une surface carrée en dimension 2 et un volume cubique, en dimension 3. Un β -hypercube est défini par :

Définition 5. (β -hypercube[1]) On appelle β -hypercube, un cube de dimension n de centre $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n) \in \mathbb{R}^n$ et de taille $\beta \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble des points M de coordonnées $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$

$(m_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant : $p_i - \frac{\beta}{2} \leq m_i \leq p_i + \frac{\beta}{2}$.

Un hypervoxel se déduit de la définition d'un β -hypercube en posant $\beta=1$.

Définition 6. (hypervoxel) On appelle hypervoxel un 1-hypercube de centre $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n) \in \mathbb{Z}^n$.

La figure 1.6 montre en dimension 2 un pixel en 1.6a et en 1.6b, un voxel en dimension 3 un cas particulier d'un hypervoxel suivant la valeur de n. Ces pavés permettent de construire des objets discrets d'une image numérique en dimension 2 ou 3.

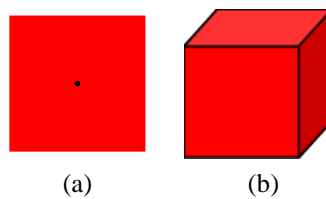


FIGURE 1.6 – Un pixel en 1.6a, et un voxel en 1.6b

- plus généralement, nous pouvons aussi voir un point discret comme un polytope ou une courbe fermée. Le barycentre de ce polytope est le centre du pavé, illuminant les autres points continus. Dans ce cas, il s'en suit qu'une description des contours du pavé s'avère nécessaire, permettant de l'identifier en plus de la connaissance de son barycentre.

Le modèle de représentation adopté pour désigner un point discret permet de mettre en lumière certaines caractéristiques. La seconde et la dernière conception d'un point discret s'intéressent à des éléments comme le volume et l'aire d'une région en faisant une somme d'aire pavé par pavé. Lorsque les pavés sont réguliers, les calculs d'aire et de volume d'une région sont faciles. Il suffit de déterminer le nombre de pavés appartenant à cette region. Cela peut avoir des applications en agronomie tels que le calcul de l'aire d'un champ ou de l'aire d'un lac. Le calcul du périmètre consiste à effectuer la somme des côtés de certains pixels.

La troisième conception d'un point inclut la définition des pavés d'une grille irrégulière isothétique.

Pavés irréguliers

Les pavés irréguliers sont utilisés dans la description des images de bandes dessinées[41] et dans la conception des images par regroupement de pavés.

La figure 1.7 présente l'utilisation des pavés irréguliers dans la représentation.

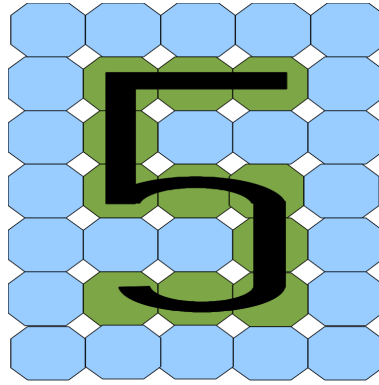


FIGURE 1.7 – Pavés irréguliers

Les pavés irréguliers servent, en regroupant des pavés de même nature, à accélérer le traitement des pavés et à améliorer le temps de calcul. Si deux pavés adjacents ont la même intensité, nous pouvons les confondre en un seul. Le traitement consistant à allumer deux pavés et à modifier l'intensité de chaque pavé, revient à allumer un seul pavé en changeant son intensité.

Une grille irrégulière est un espace discret où les pavés ne sont pas identiques.

Les grilles irrégulières isothétiques[85, 41] représentent un espace discret, avec un pavage irrégulier où les pavés sont des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes du repère de l'espace euclidien en dimension 2. Les grilles irrégulières isothétiques sont utilisées dans la simulation et l'accélération de calculs. Elles permettent une meilleure représentation de certaines parties de l'image[41].

La figure 1.7 montre un exemple de grille irrégulière isothétique décrivant une droite continue [41] discrétisée en 1.8a, et en 1.8b un autre exemple de grille irrégulière isothétique.

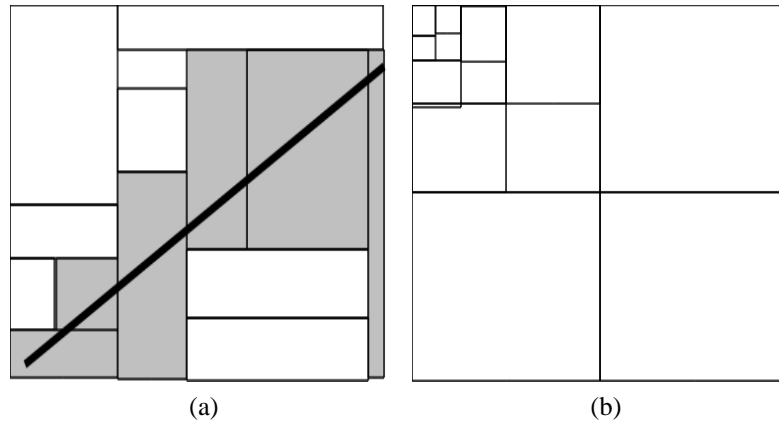


FIGURE 1.8 – Grille irrégulière isothétique

Définition 7. (Pavé isothétique[85]) On appelle pavé P de centre $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n) \in \mathbb{R}^n$ et de côtés $(l_p^{c_1}, l_p^{c_2}, \dots, l_p^{c_{n-1}}, l_p^{c_n}) \in \mathbb{R}_+^n$, l'ensemble des points M de coordonnées $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant : $c_i - \frac{l_p^{c_i}}{2} \leq m_i \leq c_i + \frac{l_p^{c_i}}{2}$.

La figure 1.9 montre une illustration d'un pavé isothétique en dimension 2 en 1.9a et en dimension 3 en 1.9b.

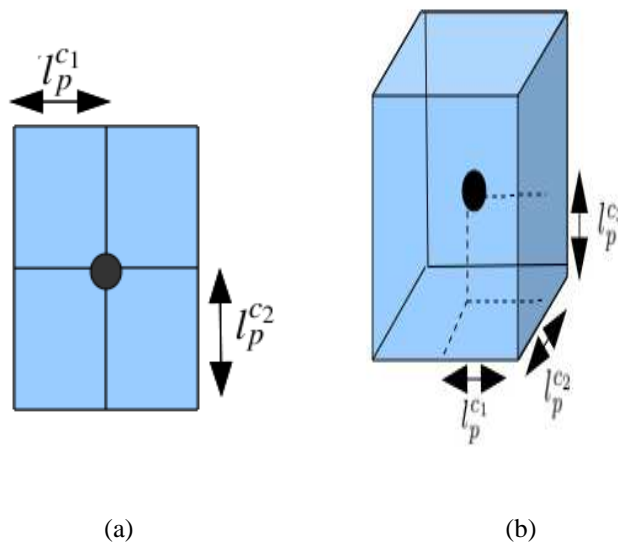


FIGURE 1.9 – Pavé isothétique en dimension 2 et 3

Dans les images discrètes classiques le pixel est centré sur un point de \mathbb{Z}^2 et a un côté de taille unitaire, dans les grilles irrégulières isothétiques le pavé p est centré en $(x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2$ et les tailles de ses côtés sont données par un couple noté $(l_p^x, l_p^y) \in \mathbb{R}^2$ [85] permettant de définir des pavés à différente taille.

Cette notion de pavé de la définition 7 peut également s'étendre à la définition d'un pavé comme étant un polytope convexe décrit à l'aide de ses sommets et de son barycentre.

Les grilles irrégulières isothétiques améliorent les grilles carrés en fournissant une représentation détaillée de certaine zone de l'image à une échelle différente, le souci étant de mieux représenter les zones de l'image. Les grilles irrégulières isothétiques peuvent être interprétées comme une composition de grilles régulières rectangulaires. Elles incluent ou étendent les espaces discrets classiques carrés et peuvent être utilisées pour la définition d'objets discrets multi-échelles. Cela signifie que les algorithmes classiques sur les grilles régulières peuvent s'appliquer sur des parties de l'image où les pavés sont uniformes.

Un pavé peut être concave ou convexe. Son rôle est de porter une intensité pour représenter un point lumineux, illustré dans la figure 1.7 décrivant le chiffre 5.

Dans certains cas, en choisissant des pavés concaves le barycentre n'est pas à l'intérieur du pavé. Cela peut avoir des conséquences sur les algorithmes de reconnaissance de formes basés sur ces barycentres. Les pavés convexes permettent d'avoir deux notions d'un point discret, le point barycentre et l'aire complète contenant ce point.

Le pavage est une technique de décomposition de l'espace en composants élémentaires ou pavés. Le pavage d'un espace euclidien permet d'aboutir à un espace discrétisé où chaque pavé est centré sur son barycentre ou son noyau désignant un point discret illuminant le pavé.

Techniques de pavage

Il existe plusieurs techniques de pavage de l'espace euclidien : le pavage peut être réalisé par un diagramme de Voronoï [83], par une triangulation de Delaunay et par une application quasi affine.

Le diagramme de Voronoï est défini par :

Définition 8. (Diagramme de Voronoï [83, 84]) Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $S = (s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k)$ un ensemble fini de k points sites de E . Soit $P \in S$.

On appelle cellule de Voronoï de P (Dans S), l'ensemble des points de E situés plus près de P que tous les autres points de S : $Vor_S(P) = \{M \in E \mid \forall Q \in S, MP \leq MQ\}$.

On appelle diagramme de Voronoï l'ensemble des cellules de Voronoï formées par les points de S : $Vor(S) = \{Vor_S(P) \mid P \in S\}$.

Une cellule de Voronoï est un polytope convexe car elle est issue de l'intersection de demi-hyperplans convexes.

En \mathbb{R}^3 , une cellule de Voronoï est un polyèdre convexe : nous pouvons le déduire de la définition 8.

Ainsi, si les sites sont des points de \mathbb{Z}^2 , les cellules de Voronoï sont des pavés carrés et dans le cas où les sites sont des points de \mathbb{Z}^3 , les cellules sont des cubes.

De plus, il existe une relation duale entre le diagramme de Voronoï et les triangles de Delaunay. Les triangles de Delaunay se définissent à partir du diagramme de Voronoï : Deux sites s et s' créent une arête dans le graphe de Delaunay si et seulement si les régions de Voronoï associées à s et s' sont adjacentes c'est à dire

$$\text{Arêtes}(S) = \{(s, s') \in S^2 \mid Vor_S(s) \cap Vor_S(s') \neq \emptyset\}.$$

Définition 9. (Triangulation de Delaunay [83, 84]) Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $S = (s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k)$ un ensemble fini de k points sites de E . En reliant les points sites des cellules de Voronoï adjacents par des segments, nous obtenons des triangles de Delaunay.

La triangulation de Delaunay constitue également une technique de pavage de l'espace comme nous pouvons le voir en 1.10e dans la figure 1.10 en reliant les points sites.

La figure 1.10 montre un diagramme de Voronoï en \mathbb{R}^2 : en 1.10a, 1.10b, 1.10c, 1.10d, la construction des pavés est illustrée en prenant en compte les points sites et en traçant les médiatrices ; nous avons en 1.10d le diagramme de Voronoï avec les 4 sites représentés par des points. Chaque cellule est constituée d'un site et d'un pavé.

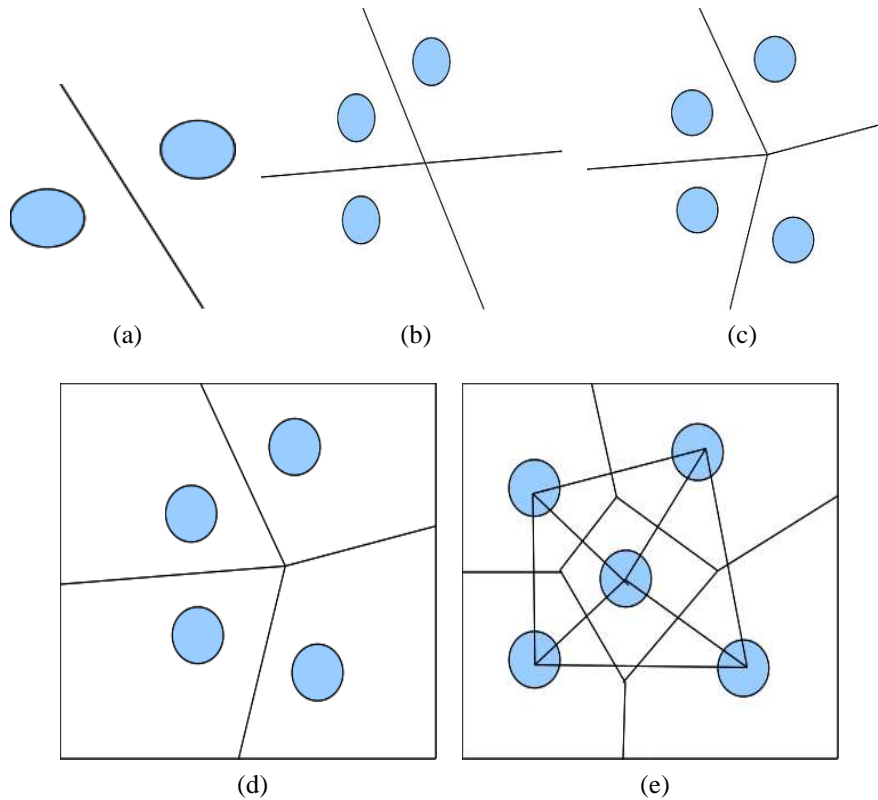


FIGURE 1.10 – Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay

Le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay permettent d'aboutir à des pavés de formes variées.

Nehlig[80, 81, 82] a introduit un pavage régulier de l'espace par la définition d'une Transformation Quasi-Affine[82].

Définition 10. (Transformation Quasi Affine) On appelle Transformation Quasi Affine T une fonction définie par :

$$T : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto \begin{cases} y_1 = \left[\frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n + b_1}{\omega} \right] \\ y_2 = \left[\frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n + b_2}{\omega} \right] \\ y_{n-1} = \left[\frac{a_{n-11}x_1 + a_{n-12}x_2 + \dots + a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n + b_{n-1}}{\omega} \right] \\ y_n = \left[\frac{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n + b_n}{\omega} \right] \end{cases}$$

où a_{ij} sont des entiers et ω un entier strictement positif. La transformation quasi affine est définie par sa matrice $A = \frac{1}{\omega} (a_{ij})$ et son vecteur (b_i) .

En dimension 2, soient les deux familles de droites continues D_i et D'_j définies par $\omega * i \leq ax + by + e \leq \omega * (i + 1)$ et $\omega * j \leq cx + dy + f \leq \omega * (j + 1)$ respectivement avec a, b, c, d, e, f, ω fixés (la matrice $A = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et le vecteur $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ sont fixés). D_i et D'_j définissent des aires de droites continues pour i et j fixés. Lorsque x et y vérifient $\omega * k \leq ax + by + e \leq \omega * (k + 1)$ et $\omega * l \leq cx + dy + f \leq \omega * (l + 1)$, nous obtenons alors $T(x, y) = (k, l)$. Le pavé (i, j) créé par la transformation T est l'ensemble des points continus tels que $\{(x, y) / T(x, y) = (i, j)\}$. Nous obtenons une grille régulière. Lorsque ω varie d'une droite à l'autre, nous obtenons une grille irrégulière.

La figure 1.11 met en évidence un pavage de l'espace par une transformation Quasi-Affine. Nous avons en 1.11a, des pavés réguliers et en 1.11b des pavés irréguliers.

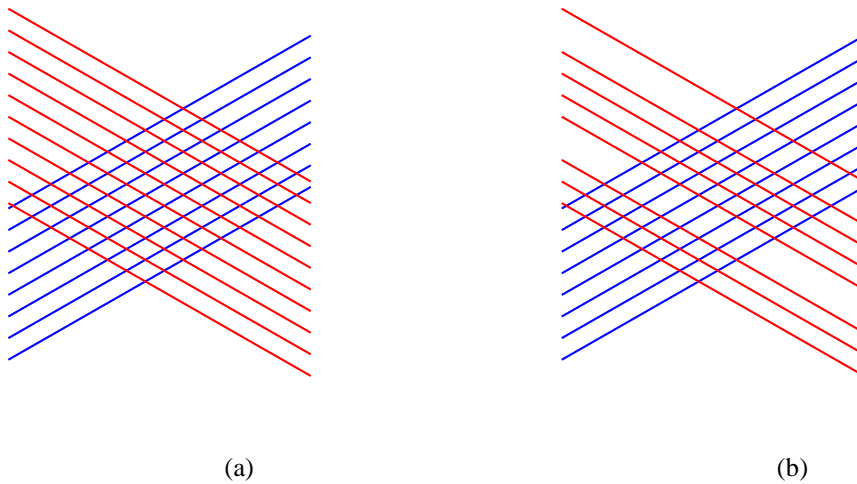


FIGURE 1.11 – Pavage avec une transformation Quasi affine

La définition 10 peut s'étendre en dimension 3 et supérieure pour définir un pavage de l'espace.

D'autres techniques de pavage ont également été définies[41]. Le k -dimensional tree [41] est une technique qui consiste à découper le plan en suivant les axes du repère[41]. Par exemple dans le cas de grilles irrégulières isothétiques, on peut décider de représenter certaines zones de l'image par des pavés de petite taille, comme la partie centrale par exemple, pour obtenir une représentation nette. La figure 1.12 montre des exemples de grilles générées avec des techniques différentes.

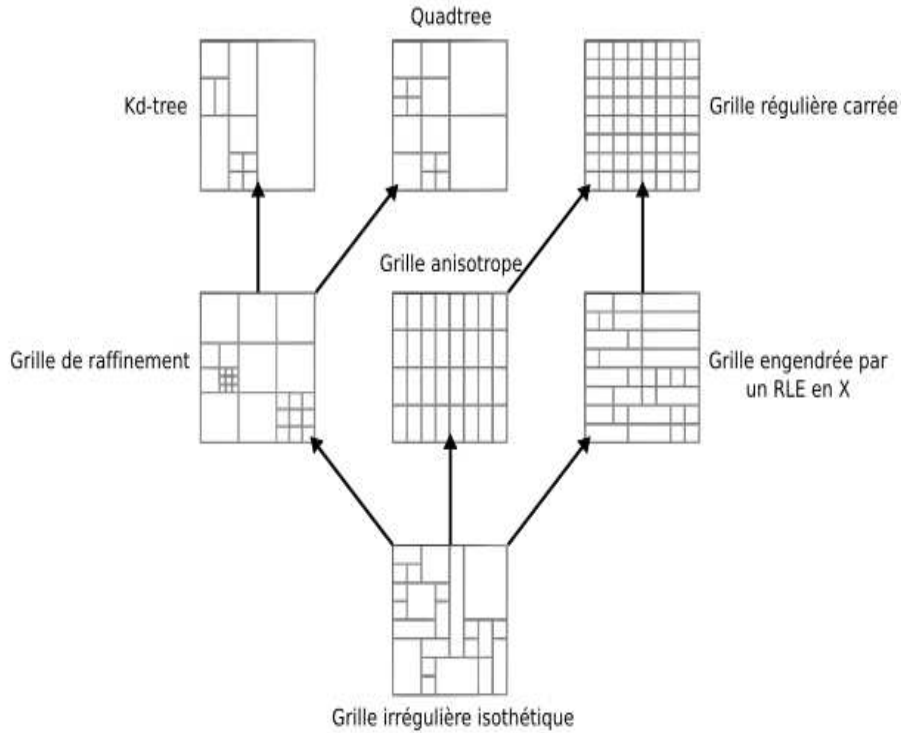


FIGURE 1.12 – Techniques de pavage tirées de [41]

Il existe également une relation duale entre le pavage et le maillage. En reliant les centres des pavés par une chaîne, nous formons un maillage qui permet d'aboutir à d'autres pavés. Cette relation permet de réaliser le passage d'un pavé à l'autre. Lorsqu'une image est représentée en utilisant des formes de pavés donnés, pour avoir la représentation avec d'autres types de pavés de cette même image, il faut établir une technique de passage d'un pavé à l'autre en déterminant les nouvelles intensités des pavés en fonction des autres pavés. Par exemple, si un pavé est inclus dans un autre pavé, alors son intensité est identique à celle de l'autre. Si un pavé intersecte plusieurs autres pavés, alors son intensité est déterminée par la moyenne de l'intensité des pavés intersectés. Une étude approfondie sur l'impact des changements de pavés sur l'image permettra de comprendre les choix des pavés.

La figure 1.13 présente en 1.13a la relation duale entre le pavage carré et le maillage carré, en 1.13b le dual entre le pavage hexagonal et le maillage triangulaire et en 1.13c le pavage triangulaire avec le maillage hexagonal.

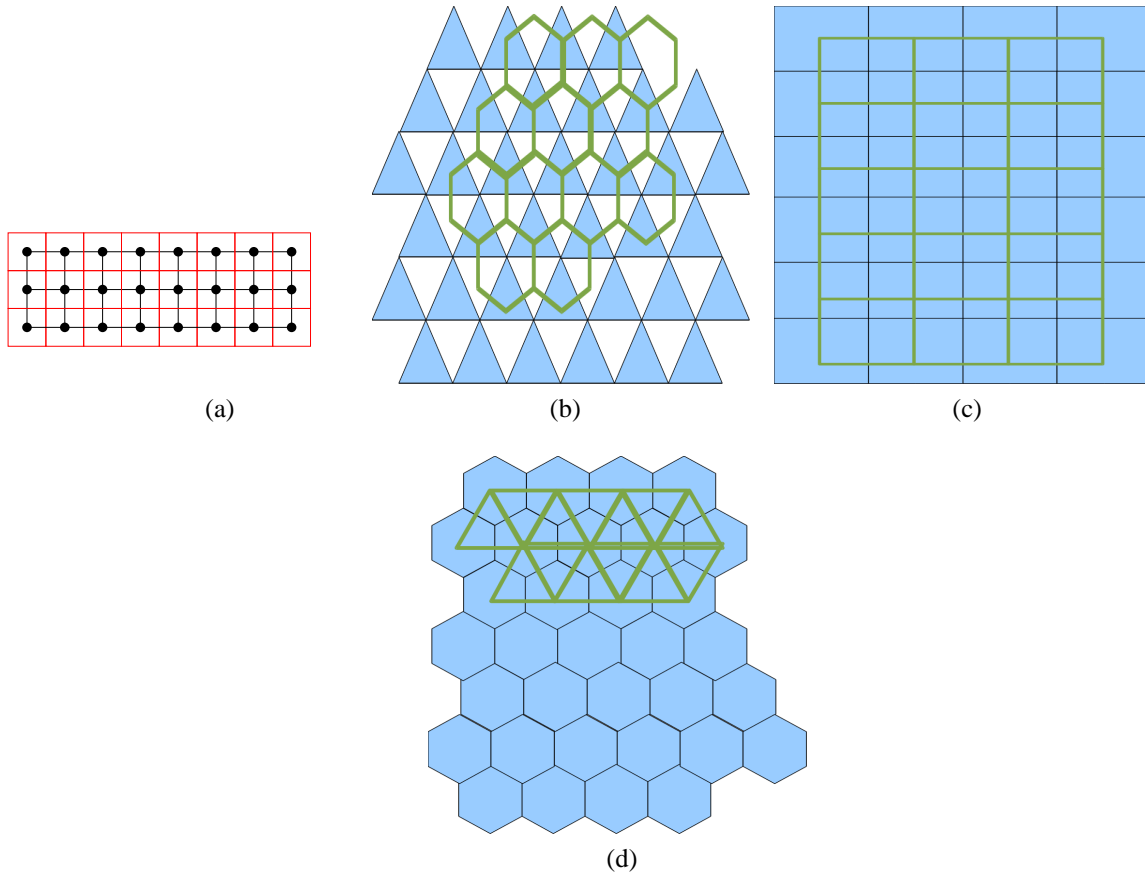


FIGURE 1.13 – Relation duale entre le pavage et le maillage

Un pavé englobe toutes les définitions citées antérieurement, et pour avoir une définition extensible générale, il prend en compte des aires fermées qui ne sont pas forcément des polytopes convexes à une échelle donnée. Nous intégrons le fait qu'un pavé peut aussi être une aire perforée constituée d'hypervoxels ou de sous-pavés plus petits de même intensité.

La figure 1.14 illustre une image composée de pavés perforés, fermés. Chaque pavé peut être vu comme la réunion de sous-pavés de même intensité.

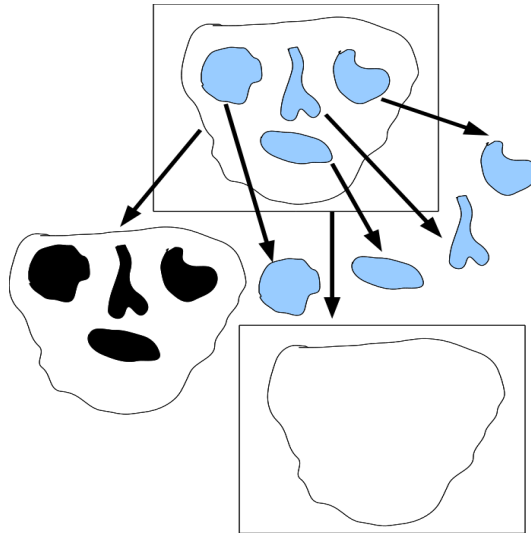


FIGURE 1.14 – Décomposition d'une image en pavés

Il existe une relation entre les pavés, mentionnée dans la section suivante.

Propriétés relatives aux pavés

Cette section est consacrée à la présentation de certaines propriétés relatives aux pavés. Elles permettent d'identifier les positions relatives ou les relations entre les pavés afin de comprendre la structure détaillée interne des contours de l'image numérique. Elles s'articulent autour de la notion de voisinage en grilles régulières, et en grilles irrégulières isothétiques essentiellement, car la notion de voisinage en grilles irrégulières variées reste à définir au cas par cas, et cela implique l'importance de l'application de ces grilles en analyse d'image.

Dans un espace régulier où le point discret est un point de \mathbb{Z}^n , la notion de k-voisinage ou k-adjacence est définie par :

Définition 11. (*k-voisinage*[86] ou *k-adjacence*) Soient $P(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$ et $Q(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n)$ deux points discrets. P et Q sont dit *k-voisins* avec $0 \leq k < n$ si et seulement si : $|p_i - q_i| \leq 1$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\sum_{1 \leq i \leq n} |p_i - q_i| \leq n - k$.

La notion de k-voisinage est équivalente à la notion de k-adjacence. Lorsque deux points discrets sont k-voisins, ils sont aussi k-adjacents.

Les figures 1.15 et 1.16 illustrent le voisinage en dimension 2 et 3 respectivement. En 1.15a le pixel en vert est en 1-voisinage avec les pixels bleus, et en 1.15b le pixel vert est en 0-voisinage avec les pixels bleus. En fait, en dimension 2, le 1-voisinage consiste à considérer les pixels voisins d'un pixel central par rapport à ses côtés correspondant aux pixels adjacents tandis que le 0-voisinage prend en compte les côtés et les sommets.

En dimension 3, nous avons des exemples de 0-voisinage, 1-voisinage, 2-voisinage respectivement en 1.16a, 1.16b, et en 1.16c. Nous voyons que le 2-voisinage correspond à la présence de 6 voxels par rapport aux 6 faces ; le 1-voisinage comprend en plus des 6 voxels, 12 voxels issus des relations à travers les 12 côtés : Ce qui fait en tout 18 voxels ; le 0-voisinage revient à avoir en plus des 18 voxels autour du voxel central, les voxels voisins des sommets au nombre de 8. Ce qui associe le 0-voisinage à la présence de 26 voxels autour d'un voxel central.

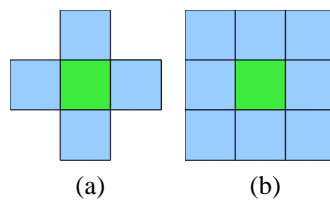


FIGURE 1.15 – *Voisinage en dimension 2*

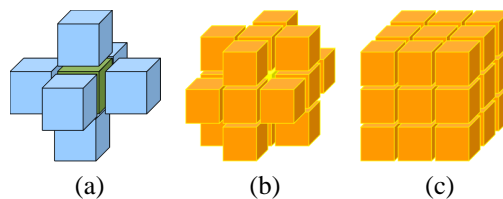


FIGURE 1.16 – *Voisinage en dimension 3*

Concrètement, lorsque deux points discrets A et B sont k-voisins, en posant $d(A,B)$ la distance euclidienne entre A et B, il s'en suit que $d(A,B) \leq \varepsilon$ où ε doit être petit afin d'avoir une résolution acceptable nécessaire pour une représentation du contour. En dimension 2, si A et B sont 1-voisins alors $d(A,B)^6 = 1$ unité ; si A et B sont 0-voisins sans être 1-voisins, alors $d(A,B) = \sqrt{2}$ unité.

6. $d(A,B)$ indique la distance euclidienne de A à B

Dans le cas de grilles irrégulières isothétiques, une nouvelle définition du voisinage s'impose :

Définition 12. (ve-voisinage[85]) Soient $P(x_p, y_p, l_p^x, l_p^y)$ et $Q(x_q, y_q, l_q^x, l_q^y)$ deux pavés d'une grille irrégulière isothétique. P et Q sont dit ve-voisins si et seulement si on a (1) ou (2) :

1. $|x_p - x_q| = \frac{l_p^x + l_q^x}{2}$ et $|y_p - y_q| \leq \frac{l_p^y + l_q^y}{2}$;
2. $|x_p - x_q| \leq \frac{l_p^x + l_q^x}{2}$ et $|y_p - y_q| = \frac{l_p^y + l_q^y}{2}$

Les figures 1.17 et 1.18 montrent la notion de voisinage dans le cas de grilles irrégulières isothétiques en dimension 2 et 3 :

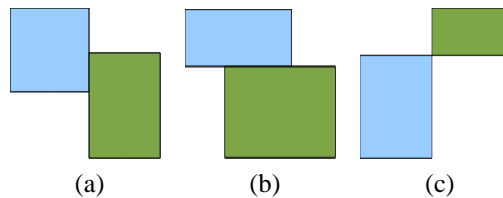


FIGURE 1.17 – Voisinage en grille irrégulière isothétique en dimension 2

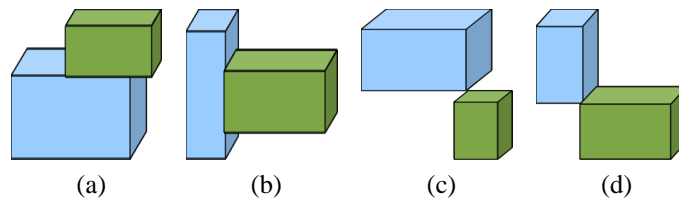


FIGURE 1.18 – Voisinage en grille irrégulière isothétique en dimension 3

La notion de k-voisinage est l'équivalent discret de la notion de voisinage dans le continu servant à définir la notion de continuité d'une courbe discrète. La valeur associée à k décrit l'orientation des pavés dans leur voisinage pour former cette continuité.

En outre, nous voyons qu'un pavé est caractérisé par sa propre forme géométrique pour mieux représenter un point lumineux. L'intensité du pavé est aussi un élément capital, car elle joue un rôle dans la détection d'un contour synonyme d'une variation remarquable d'intensité. C'est à partir des

contours que nous allons identifier des formes incluses. Une forme est un objet discret qui a certaines propriétés permettant de l'identifier.

De plus, la définition d'un pavé ou la définition d'une technique de pavage ne suffisent pas pour avoir une représentation discrète d'un objet continu pouvant suivre plusieurs topologies. La technique de discrétisation a un impact sur la représentation discrète des objets discrets. En effet selon une technique donnée, la représentation discrète de l'objet discret diffère. Il s'en suit que nous aboutissons à plusieurs représentations discrètes d'un contour discret.

1.3.2 Contours discrets

Une image numérique est composée d'objets discrets. Nous nous intéressons dans cette section à la définition d'un objet discret et aux concepts liés à un objet discret, car un contour discret est un objet discret. Ces concepts sont des invariants nécessaires pour aboutir à la reconnaissance de formes.

Un contour discret détermine une frontière entre deux zones d'une image. Elle montre la différence en terme d'intensité entre deux régions. Ce qui implique que la détection des contours entraîne la segmentation de l'image en régions.

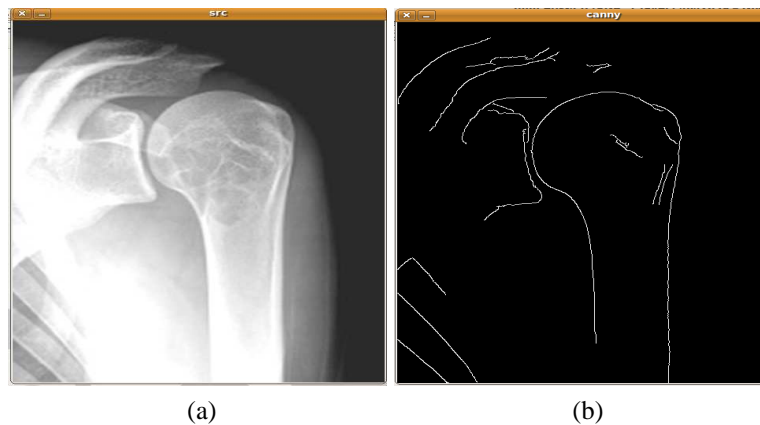
La figure 1.19 montre un changement d'intensité entre deux zones, marqué par des courbes fermées en rouge.



FIGURE 1.19 – *Changement d'intensité, entouré en rouge*

Depuis les années 1970, les chercheurs ont établi des algorithmes d'extraction de contours discrets

basés sur la définition de filtres comme sobel, canny. Ces algorithmes n'ont pas le même masque. L'application des filtres sur une image donne des contours discrets qui n'ont pas les mêmes caractéristiques notamment l'épaisseur. La question de l'impact des filtres sur la reconnaissance des objets analytiques en dimension 2 et 3 mérite d'être élucidée en perspective. La figure 1.20 montre des contours discrets obtenus par l'utilisation du filtre de Canny qui permet d'avoir des contours d'épaisseur une unité : en 1.20a une image source, en 1.20b ses contours discrets de Canny, implémentés avec la librairie OpenCV en 1.20c.



```

1 #include "cv.h"
2 #include "highgui.h"
3 int main()
4 {
5     IplImage* newImg; // original image
6     IplImage* gray; // gray image for the conversion of the original image
7     IplImage* cannyImg; // gray image for the canny edge detection
8     //load original image
9     newImg = cvLoadImage("debutfemur.png",1);
10    gray = cvCreateImage(cvSize(newImg->width, newImg->height), IPL_DEPTH_8U, 1 );
11    cvCvtColor(newImg, gray, CV_BGR2GRAY );
12    cannyImg = cvCreateImage(cvSize(newImg->width, newImg->height), IPL_DEPTH_8U, 1);
13    // canny edge detection
14    cvCanny(gray, cannyImg, 50, 150, 3);
15    cvNamedWindow("src", 1);
16    cvNamedWindow("grayer", 1);
17    cvNamedWindow("canny",1);
18
19    cvShowImage( "src", newImg );
20    cvShowImage( "grayer", gray );
21    cvShowImage( "canny", cannyImg );
22    cvWaitKey(0);
23
24    cvDestroyWindow( "canny" );
25    cvDestroyWindow( "grayer" );
26    cvDestroyWindow( "src" );
27    cvReleaseImage( &newImg );
28    cvReleaseImage( &gray );
29    cvReleaseImage( &cannyImg );
30    return 0;
31 }
32 }
33

```

(c)

FIGURE 1.20 – Contours de Canny

Pour les objets en dimension 3, l'obtention de contours en dimension 3 peut se faire avec des masques 3D appropriés. Comment peut-on modéliser un contour discret ?

Nous voyons qu'un contour discret est défini par :

Définition. Un objet discret O est un ensemble de pavés .

Ainsi, un objet discret peut être représenté en utilisant des pavés réguliers ou irréguliers. Un objet discret peut également être constitué d'un seul pavé.

La figure 1.21 montre un objet discret construit avec des pavés différents.

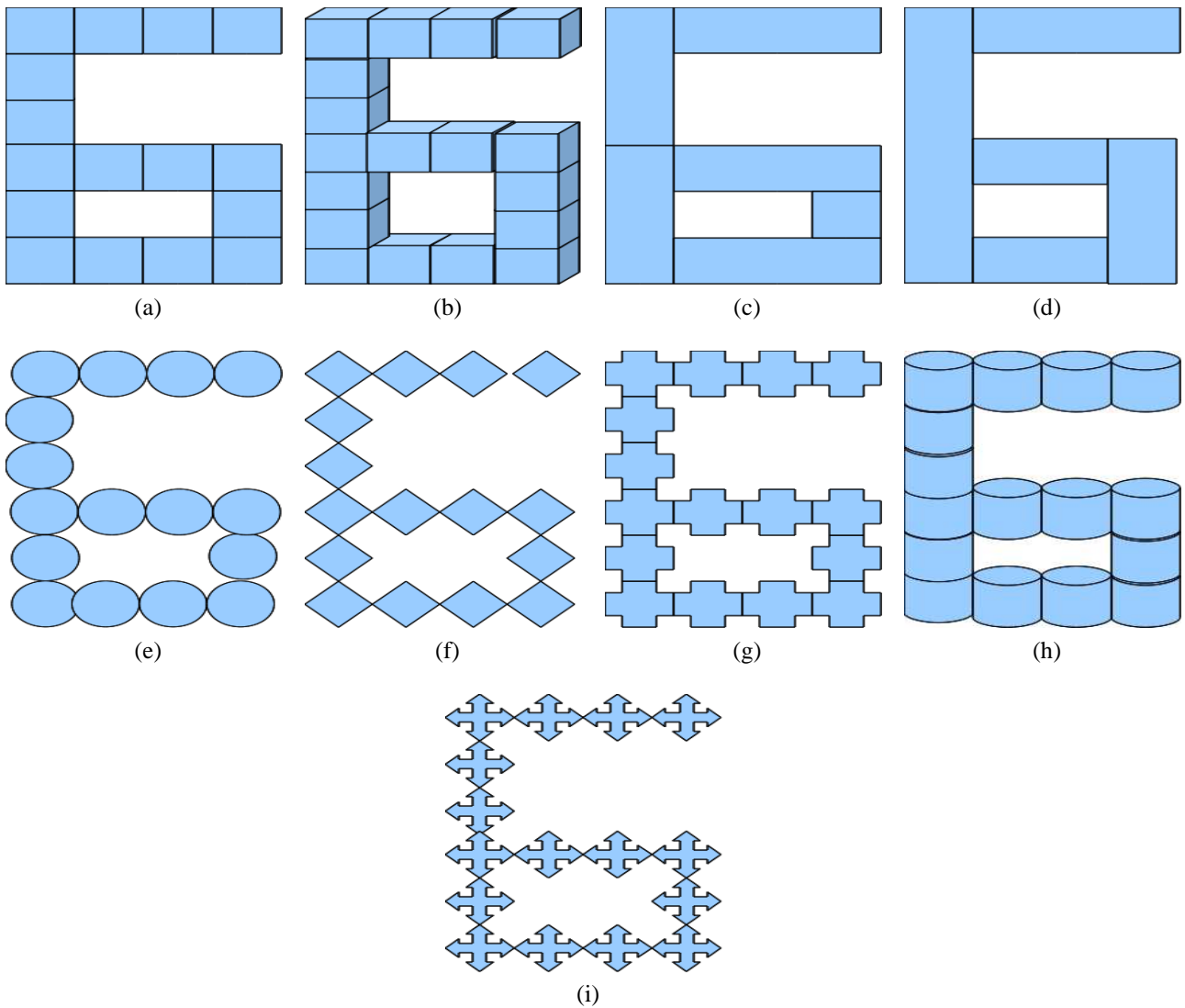


FIGURE 1.21 – Objets discrets construits avec plusieurs types de pavés.

Ainsi, nous pouvons décrire un contour discret avec des pavés de taille différente pour mettre en lumière certaines caractéristiques comme la taille de la courbe continue, le rétrécissement d'une région[41]. Dans la figure 1.22, nous observons une région en 1.22a et une courbe en 1.22b décrites par des pavés de taille différente : suivant la forme des objets continus, nous avons une possibilité de choisir des pavés adéquats.

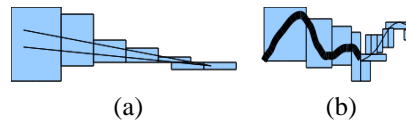


FIGURE 1.22 – Contours multi-échelles

Il ne faut pas appliquer systématiquement les lois de la géométrie euclidienne en géométrie discrète. En effet dans un espace continu, un objet continu possède une infinité de points continus. Ce qui n'est pas le cas dans un espace discret où un objet discret est construit avec un nombre fini de points discrets. Ce qui permet sa représentation sur l'écran d'un ordinateur en terme d'espace alloué. Cela favorise la mise en place d'algorithmes de traitements de ces pavés limités. D'autres particularités propres aux objets discrets sont :

- l'intersection de droites discrètes peut être un ensemble vide qui ne contient pas de points discrets ;
- deux droites discrètes différentes parallèles peuvent avoir plusieurs points discrets en commun ;
- un arc de cercle discret peut également être un segment de droite discrète.

Ces propriétés ont une incidence sur l'interprétation des formes contenues dans un contour car à travers un contour nous pouvons identifier un arc de cercle discret et un segment de droite discret. Des contours qui se coupent peuvent contenir deux segments de droites discrètes. Les algorithmes de reconnaissance de formes doivent pouvoir nuancer ces propriétés.

Les caractéristiques précédentes sont représentées dans la figure 1.23 : en 1.23a, un arc de cercle discret assimilé à un segment de droite ; en 1.23b, l'intersection de deux droites discrètes ; nous observons en 1.23d une droite discrète avec un nombre fini de points discrets. Ainsi lors de la recherche d'une forme particulière telle qu'un arc de cercle discret ou un segment de droite discrète, nous pouvons aboutir à un même objet discret respectant les deux modèles. Le discret est une approximation

du continu. Plus la taille des pavés est grande, plus l'objet discret peut respecter plusieurs équations de divers modèles.

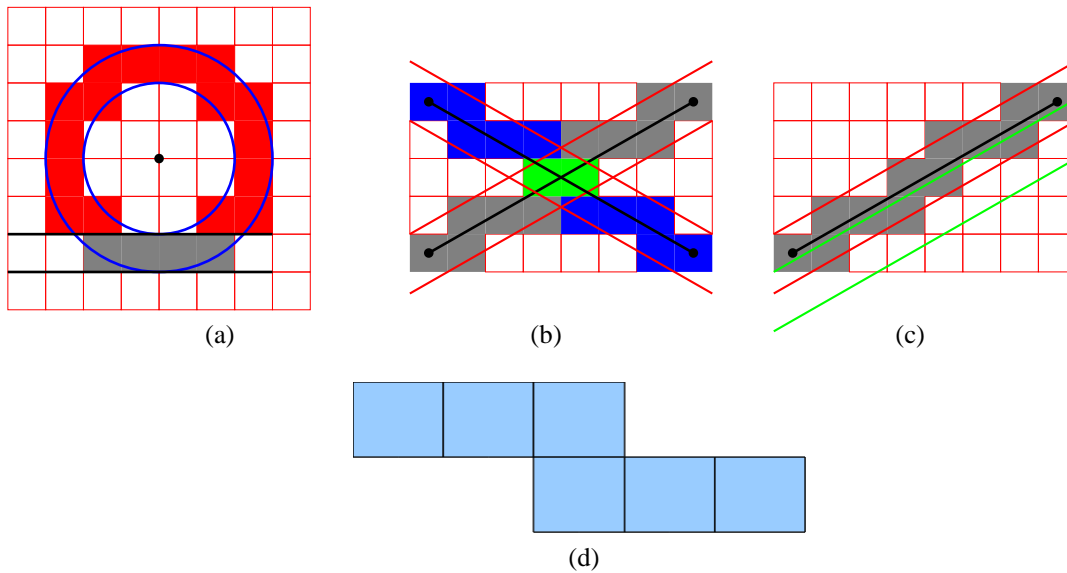


FIGURE 1.23 – Objets discrets

De plus dans l'espace euclidien en dimension 2, par deux points passe une droite et une seule tandis que dans l'espace discret, par deux pavés peuvent passer une infinité de droites discrètes. Certaines règles dans l'espace euclidien ne sont pas vraies dans l'espace discret.

Pendant plusieurs années, les chercheurs ont défini plusieurs primitives discrètes comme les droites discrètes[33, 34, 32], les hyperplans discrets[15], les hypersphères discrètes[12, 39], les paraboles discrètes[113]. De plus, l'application de la définition de ces primitives est diverse : les applications sont possibles en visualisation[103], en imagerie médicale[104], en chirurgie par ordinateur[105], en tracé de rayon discret[106] ou plus généralement en tracé de courbe discrète en simulation [107].

Ces primitives sont des équivalents discrets des formes continues, permettant de construire des éléments de la géométrie discrète. Le schéma de la figure 1.24 montre des correspondances entre des objets continus et des objets discrets. Ces correspondances ne signifient pas que la discrétisation d'un objet continu est un objet discret associé.

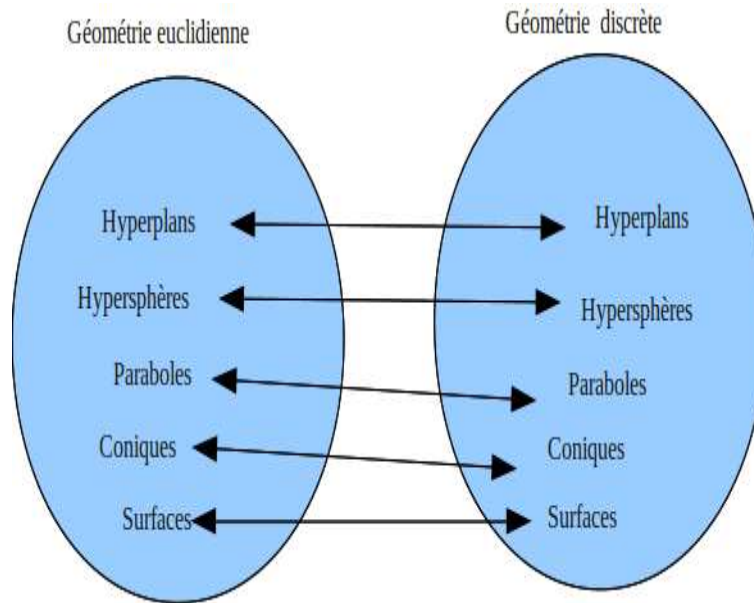


FIGURE 1.24 – Correspondance entre des objets continus et des objets discrets

Les objets de la géométrie euclidienne constituent la base de construction et d'identification des objets discrets de la géométrie discrète. Le passage du discret au continu est appelé "reconstruction". Il permet d'établir la reconnaissance des objets discrets. Plusieurs techniques existent notamment celles basées sur des espaces de paramètres que nous étudierons dans la section 1.4.

Dans cette section, nous présentons quelques modèles d'un objet discret telles que les codes de Freeman, le k-Chemin, le k-Objet, le k-arc, le k-Courbe, les hyperplans analytiques discrets, les hypersphères analytiques discrètes et les paraboles discrètes.

Codes de Freeman

Un contour discret peut être décrit par les codes de Freeman[33]. Dans le codage de Freeman, Une valeur entière comprise 0 et 7 est associée à chacune des relations de voisinage entre les pavés successifs. La figure 1.25 met en évidence le codage d'un contour discret par les codes de Freeman.

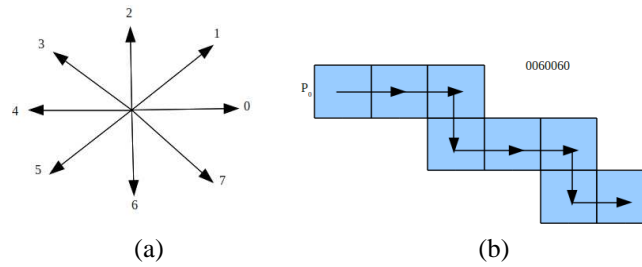


FIGURE 1.25 – Codes de Freeman 0060060 d'un contour discret

Cette description numérique ne nous intéresse pas dans l'application des méthodes de reconnaissance de formes car elle fait une abstraction de certaines caractéristiques d'un contour comme l'épaisseur, l'intensité des points lumineux pour se concentrer sur la direction du contour, la relation de voisinage entre des pavés successifs.

La notion de voisinage introduit une logique dans le cadre de la segmentation des régions et définit deux interprétations d'un contour discret. En effet, nous pouvons considérer une région en dimension 2, comme un ensemble de pixels 1-voisins ou 0-voisins donnant lieu à deux représentations d'une région.

La figure 1.26 montre deux interprétations d'un contour dépendant du voisinage adopté : si nous considérons le 1-voisinage entre les pavés d'une région, nous avons trois régions colorées en 1.26c ; dans le cas du 0-voisinage entre les pavés d'une région, nous obtenons une région verte en 1.26b.

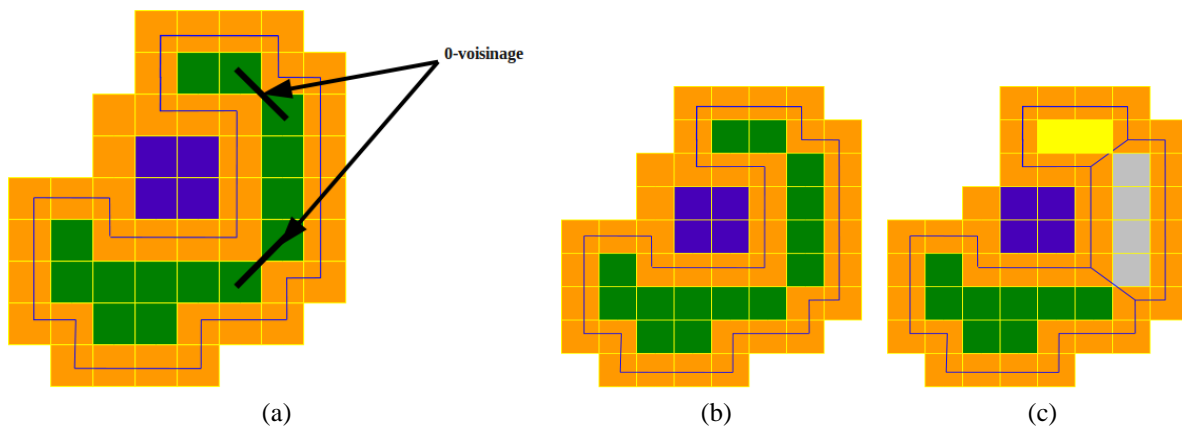


FIGURE 1.26 – Régions discrètes avec deux interprétations d'un contour discret

Modèle topologique de Khalimski-Kovalesky[129, 88, 86]

Le modèle topologique de Khalimski-Kovalesky[129, 88, 86] permet de décrire des contours d'une image en reliant par une arête, les sommets des pavés situés sur la frontière de deux régions. La chaîne obtenue constitue le contour Khalimski-Kovalesky. L'identification d'une forme dans une contour décrit par le modèle Khalimski-Kovalesky, consistera à vérifier si les sommets du contour respectent des invariants de cette forme.

En dimension 2, un point discret ou un pixel est composé de surfel, lignels et de pointels. En dimension 3, un point discret ou un voxel comprend des sommets, des arêtes, des faces et un volume.

La figure 1.27 met en évidence un point discret en dimension 2 (respectivement en dimension 3) en 1.27a (respectivement en 1.27b). Nous avons une courbe bleue respectant le modèle de Khalimski-Kovalesky, en 1.27c et en 1.27d.

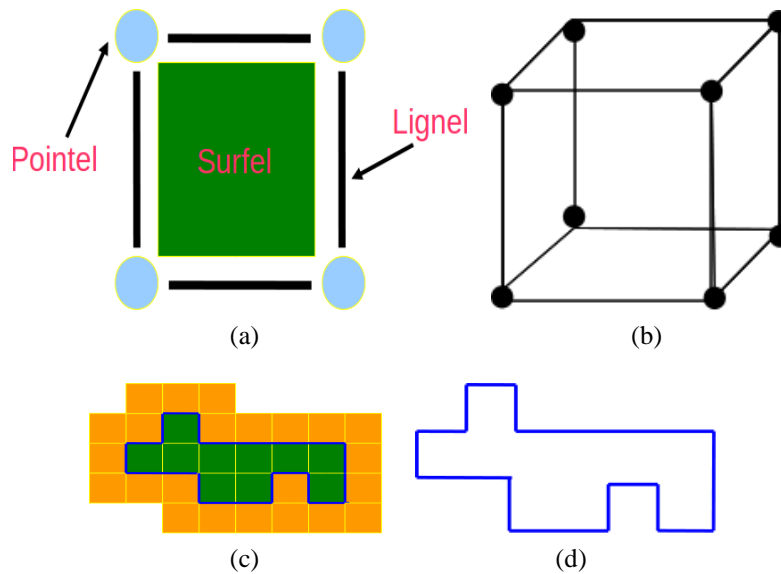


FIGURE 1.27 – Structuration d'un point discret et contour de Khalimski-Kovalesky

Les contours du modèle de Khalimski-Kovalesky dans le cas de grilles irrégulières se déduisent en considérant les bords des segments des pavés structurants.

La figure 1.28 illustre des contours Khalimski-Kovalesky dans une grille irrégulière en 1.28a et en 1.28b.

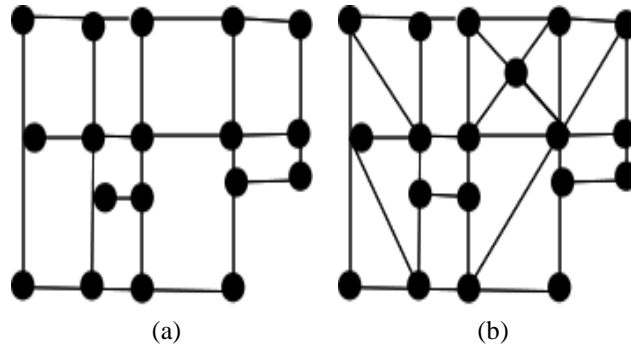


FIGURE 1.28 – Contour Khalimski-Kovalesky dans une grille irrégulière

Ce modèle n' a pas d'incidence sur les algorithmes de reconnaissance formes. Il suffit de passer comme des arguments les points discrets résultants d'une telle topologie, à l'algorithme de reconnaissance de formes.

L'algorithme 1.1 suivant propose une technique d'obtention de pointels.

Algorithme 1.1 Liste des pointels

Données en entrée : Soit $I = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_k\}$ une image composée de k pavés carrés centrés.

Données en sortie : L_p liste des pointels obtenus

Début

Pour chaque pavé P de I Faire

Si $\exists P'$ tels que (P et P' sont k -voisin) et ($\text{intensité}(P) \neq \text{intensité}(P')$) alors
 ajouter à L_p les pointels communs à P et P'

FinSi

FinPour

Fin

Lorsque la forme recherchée a été déterminée, il faudra la discrétiser dans l'espace initial de l'image pour trouver les contours discrets.

De plus, le modèle de Khalimski-Kovalesky permet de déterminer certaines caractéristiques tels que la longueur d'un contour ; il suffit d'obtenir la chaîne des points discrets appartenant au contour discret et de calculer la distance euclidienne successivement.

A l'inverse les filtres classiques tels que Laplace, Sobel, Canny sont construits sur la base d'une convolution avec la définition d'un masque amplifiant les intensités des points discrets appartenant au contour pour ainsi les mettre en évidence. Les points discrets du contour restent toujours dans le domaine de l'espace de l'image initiale.

Un contour discret peut comprendre un chemin discret.

Chemin discret

Lorsqu'un ensemble de pavés est constitué de pavés consécutifs et k -voisins, il forme un k -Chemin.

Définition 13. (*k*-chemin[86, 113]) Soient $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\}$ une séquence de n points discrets et une relation de k -adjacence. C est un k -chemin si et seulement si pour tous les éléments c_i de C avec $2 \leq i \leq n$, c_i est k -voisin avec c_{i-1} .

Un exemple de 0-chemin est illustré par la figure 1.29 avec le 0-voisinage en dimension 2 en 1.29a.

Un exemple de 2-chemin en dimension 3 avec des voxels en 1.29b.

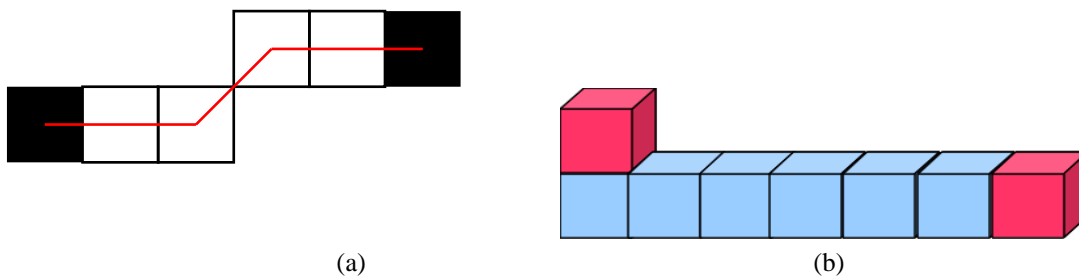


FIGURE 1.29 – Un k -Chemin en dimension 2 en 1.29a et un k -Chemin en dimension 3 en 1.29b

Un k -chemin peut contenir une k -courbe, un k -arc.

Arc discret

Un arc discret est défini par :

Définition 14. (*k*-arc[86, 113]) Soient $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\}$ un ensemble constitué d'une séquence de n points discrets et une relation de k -Adjacence. C est un k -arc si et seulement si $\forall c_i \in C$, c_i possède uniquement deux points discrets k -voisin, sauf c_1 et c_n les extrémités de C .

La figure 1.30 montre un 0-arc en dimension 2 et un 2-arc en dimension 3.

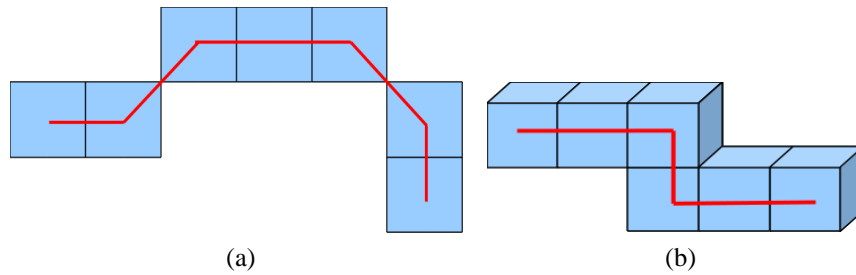


FIGURE 1.30 – Un 0-arc en dimension 2, en 1.30a et un 2-arc en dimension 3, en 1.30b

La différence entre un k-arc et un k-chemin est que dans un k-chemin un point discret peut avoir plus de deux voisins.

Un arc discret peut être inclus dans une courbe discrète.

Courbe discrète

Une k-courbe est une courbe discrète fermée. Elle est définie par :

Définition 15. (*k-courbe*[86, 113]) Soient $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\}$ un ensemble constitué d'une séquence de n points discrets et une relation de k -Adjacence. C est un k -courbe si et seulement si $\forall c_i \in C, c_i$ possède uniquement deux points discrets k -voisins, sauf c_1 et c_n les extrémités de C avec $c_1 = c_n$.

La figure 1.31 montre une 0-courbe en dimension 2 en 1.31a et en 1.31b. En 1.31c, nous avons une 2-courbe en dimension 3.

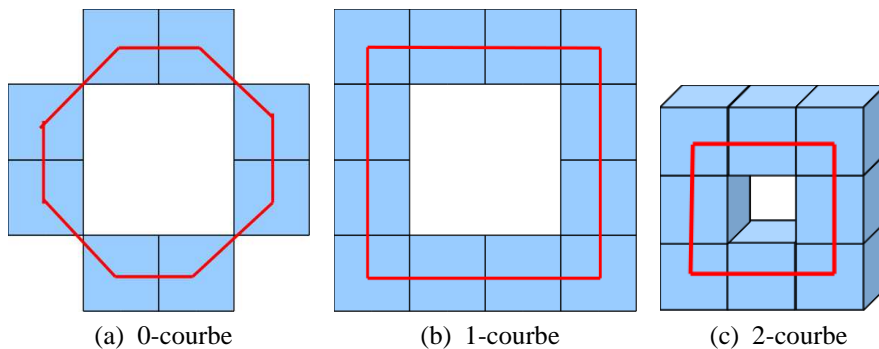


FIGURE 1.31 – k -courbe

Une k -courbe est particulièrement un modèle généralisé d'un cercle.

Un objet discret ou un contour discret peut contenir plusieurs k -chemins. Il peut également contenir un k -arc, un k -courbe. Cela complique la reconnaissance d'un chemin particulier.

Objet discret connexe

Définition 16. (k -Objet[86, 88]) Soient O un ensemble constitué de points discrets et une relation de k -Adjacence. O est dit k -connexe si et seulement si pour tout couple de points discrets $(p, q) \in O^2$, il existe une suite d'éléments de O commençant par p et se terminant par q telle que ses éléments consécutifs soient k -voisins. On dit aussi que O est un k -Objet.

La figure 1.32 illustre en 1.32a, un objet 0-connexe en dimension 2, et en 1.32b, un objet 1-connexe en dimension 3 : les pixels ou les voxels en couleur blanche désigne un exemple de points discrets p et q .

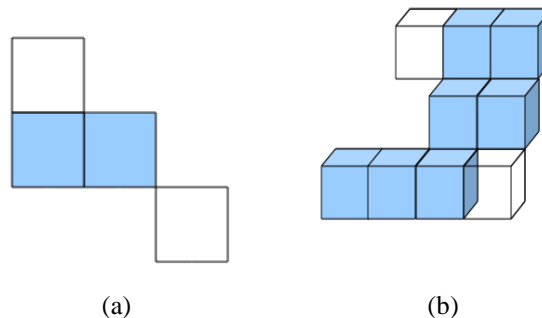


FIGURE 1.32 – Connexité en dimension 2, en 1.32a, et en dimension 3, en 1.32b

Un objet discret k -connexe ou un k -objet est un ensemble fini de k -Chemins.

Un objet discret O qui n'est pas k -connexe, peut contenir une k -composante.

Composante discrète

Définition 17. (k -composante[88]) Soit O un objet discret, une k -composante est un sous-ensemble maximal k -connexe de O .

La figure 1.33 montre un exemple d'objet O qui n'est pas 0-connexe en dimension 2 car un chemin 0-connexe n'est pas réalisable avec le pixel blanc isolé ; la zone entourée est un sous-ensemble de O

0-connexe et maximal c'est à dire une k-composante.

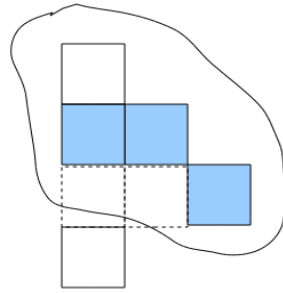


FIGURE 1.33 – Composante connexe

Ce concept représente également une discontinuité discrète permettant de décrire des objets bruités où des pavés absents, appartenant à une autre région avec une autre intensité.

Propriétés des objets discrets

Les objets discrets ont certaines caractéristiques.

Définition 18. (*k-séparant*[86, 88]) Soient O_1 et O_2 deux objets discrets tels que $O_2 \subseteq O_1$. Si $O_1 - O_2$ n'est pas k -connexe, alors O_2 est dit k -séparant de O_1 . Un objet 0-séparant sera simplement dit *séparant*.

Dans la figure 1.34, un objet discret O_1 est composé d'un objet discret O_2 , constitué de pixels en rouge et des pixels en bleu représentant l'objet discret $O_1 - O_2$ qui n'est pas 1-connexe. O_2 est alors 1-séparant de O_1 d'après la définition.

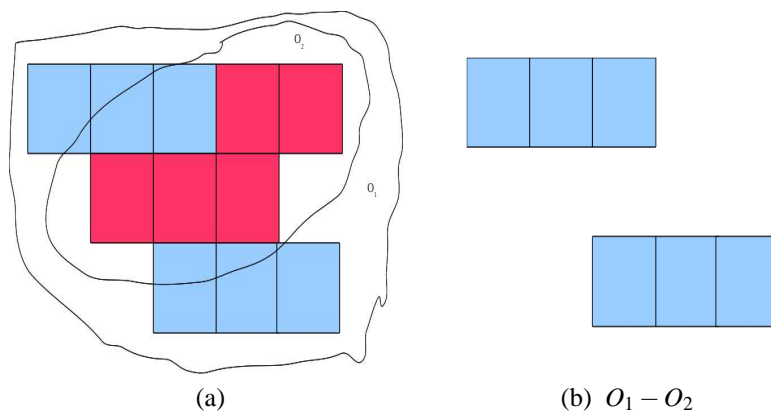


FIGURE 1.34 – Objet k -séparant

Un objet O_2 k -séparant d'un objet O_1 signifie que $O_1 - O_2$ n'est pas connexe. Il existe alors au moins un pavé appartenant à $O_1 - O_2$ n'ayant pas de pavés k -voisins. Le concept de k -séparant est une forme de discontinuité dans un objet discret.

Définition 19. (*K-tunnel*[86, 89, 88]) Soit $E \subseteq F$ tels que E n'est pas un k -séparant de F . S'il existe un point discret p tel que $E \cup p$ soit un k -séparant de F le décomposant en deux composantes connexes. Il existe alors un k -chemin reliant ces deux composantes passant par p . E présente un k -tunnel.

Les tunnels en dimension 2 et 3 sont illustrés respectivement par les figures 1.35 et 1.36

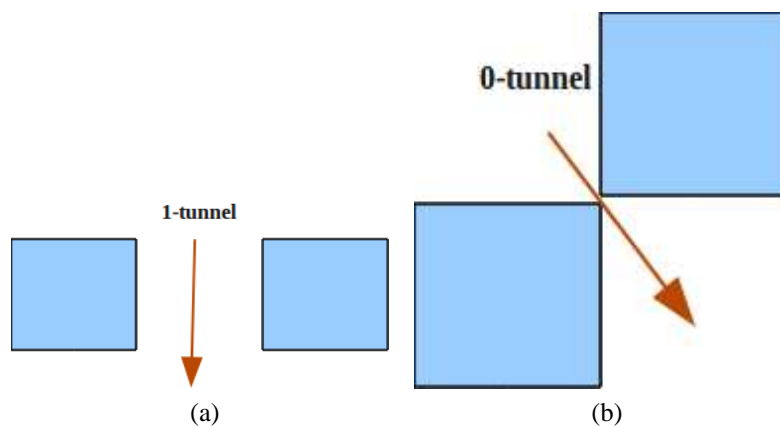


FIGURE 1.35 – Tunnels en dimension 2

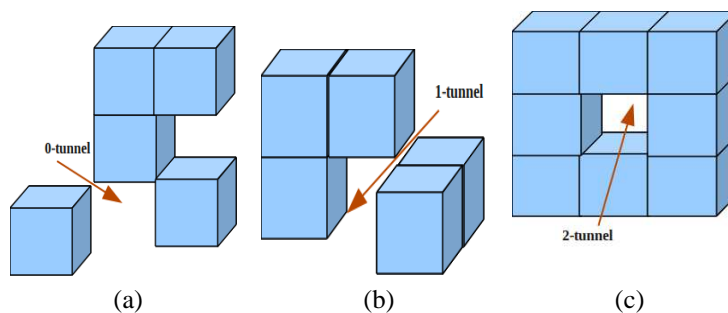


FIGURE 1.36 – Tunnels en dimension 3

Le concept de tunnel modélise des pavés absents dans un objet discret. Il décrit des formes de discontinuité discrète.

Les notions de k -objet, de k -composante, de k -chemin, de k -courbe et de k -arc généralisent les notions d'hyperplan et d'hypersphère analytique. Dans la construction d'une image, nous avons souvent recours à des objets de base comme les courbes, les droites, les rectangles pour réaliser des effets

spéciaux. Ce qui implique l'importance de maîtriser la définition de chaque objet. Les chercheurs ont proposés plusieurs modèles des hyperplans et des hypersphères discrètes [33, 34, 32]. Un segment de droite discrète est également un 8-arc discret [34, 128].

Hyperplans analytiques

Le présent travail s'intéresse à la définition analytique des droites discrètes et plus généralement des hyperplans discrets.

Comme une image numérique est bornée, il apparaît que les objets discrets qui le composent sont limités en terme de nombre de pavés ; il devient alors naturel de caractériser une droite discrète par son épaisseur.

De plus, la notion de droite continue est une base pour construire une droite discrète analytique. En effet, nous pouvons à partir de deux droites continues trouver des points de \mathbb{Z}^2 situés entre ces deux droites.

L'arithmétique apporte également une base formelle à l'étude des droites discrètes notamment avec le théorème de Bézout sur les nombres premiers. En effet, si a et b sont premiers entre eux, il existe alors (x, y) des entiers relatifs tels que $ax+by=1$. Ce qui conduit à une infinité de couples d'entiers relatifs $(x.k, y.k)$ qui sont des solutions de l'équation $a.(x.k)+b.(y.k)=k$, avec k un entier relatif. Nous savons aussi que $ax+by=1 \Leftrightarrow a(x-b)+b(y+a)=1$. Donc, le vecteur $\overleftarrow{v}(b,-a)$ de translation des points appartenant à la droite discrète. Cette translation fait apparaître une périodicité des points discrets.

La droite analytique discrète a été introduite par J. Reveillès [87].

Définition 20. (Droite analytique discrète 2D)

La droite discrète $D(a,b, \mu, \omega)$ est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\mu \leq ax+by < \mu + \omega$ avec $\mu \in \mathbb{Z}$ $\omega \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \in \mathbb{Z}^3$ et $PGCD(a,b)=1$.

La résolution du problème $\mu \leq ax+by < \mu + \omega$ revient à résoudre dans \mathbb{Z}^2 en (x, y) les équations :

$$ax+by=\mu$$

$$ax+by=\mu+1$$

...

$$ax+by=\mu + \omega - 1$$

En effet, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau.

$$\forall \alpha \in [0, \omega[, \exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } ak+bk'=\alpha$$

Alors en prenant un point $A(x_1, y_1)$ vérifiant :

$$ax_1+by_1 = \mu$$

Nous aurons

$$a(x_1-k)+b(y_1 -k')=\mu+\alpha$$

Cette dernière égalité montre comment à partir des points discrets vérifiant $ax+by=\mu$, nous pouvons obtenir les points discrets de $ax+by=\mu+\alpha$ en faisant varier $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ avec $ak+bk'=\alpha$.

Un hyperplan \mathbb{H} , est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , défini par une équation de la forme $\sum_{k=1}^n a_k x_k = b$, avec $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0, 0)$ et $\sum_{k=1}^n a_k \vec{e}_k \perp \mathbb{H}$, d'après [95]

La définition 20 de droite discrète analytique conduit par extension à une définition de l'hyperplan analytique discrète (Reveillès [15]).

Définition 21. (Hyperplan analytique discret[15]) En dimension n , l'hyperplan analytique discret de paramètres $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des points $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $\mu \leq \sum_{i=1}^n (A_i x_i) < \mu + \omega$

Cette définition s'inspire de la théorie non-standard de la droite d'Harthong-Reeb (Chollet Agathe [14]).

Les droites discrètes 3D [57, 134] sont des sous-ensembles des plans discrets 3D. Elles sont utilisées dans le cadre de la synthèse d'images par lancé de rayon. Le problème consiste à tracer une droite joignant deux points de \mathbb{Z}^3 .

L'hyperplan analytique discret fermé[86] se déduit aisément par :

Définition 22. (Hyperplan analytique discret fermé[86]) En dimension n , l'hyperplan analytique discrète fermé de paramètres $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des points $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $\mu \leq \sum_{i=1}^n (A_i x_i) \leq \mu + \omega$

L'épaisseur ω caractérise l'hyperplan analytique en permettant de les distinguer. En effet, suivant la valeur de ω , nous réalisons une classification des hyperplans analytiques et nous distinguons des propriétés liées à un hyperplan analytique[86].

Théorème 23. (Propriétés des hyperplans analytiques[86]) En dimension n , soit \mathbb{H} un hyperplan analytique discret de paramètres $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ avec $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_{n-1} \leq A_n$. Alors :

- Si $\omega \geq \sum_{i=k+1}^n |A_i|$, \mathbb{H} est alors k -séparant ;
- Si $\omega < \sum_{i=k+1}^n |A_i|$, \mathbb{H} admet des k -tunnels ;
- \mathbb{H} est k -minimal si et seulement si $\omega = \sum_{i=k+1}^n |A_i|$ ⁷.

Plusieurs types d'hyperplans analytiques discrets existent : l'hyperplan naïf, standard, supercouverture[10, 11], Pythagoricien.

Définition 24. (Classification des hyperplans analytiques[86]) En dimension n , soit \mathbb{H} un hyperplan analytique discret de paramètres $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Alors :

- \mathbb{H} est dit naïf si $\omega = \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} (|A_i|)$
- \mathbb{H} est dit standard si $\omega = \sum_{i=1}^n (|A_i|)$;
- \mathbb{H} est dit mince si $\omega < \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} (|A_i|)$
- \mathbb{H} est dit épais si $\omega > \sum_{i=1}^n (|A_i|)$.
- \mathbb{H} est *-connecté si $\sum_{i=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} (|A_i|) < \omega < \sum_{i=1}^n (|A_i|)$.

Si $\omega < \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} (|A_i|)$, l'hyperplan(mince) est déconnecté : des points discrets ne sont pas k -voisins. En dimension 2, nous obtenons la notion de droite déconnectée.

L'hyperplan naïf fermé est un hyperplan analytique fermé et naïf .

Définition 25. (Hyperplan analytique naïf fermé[86]) En dimension n , l'hyperplan analytique naïf fermé de paramètres $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des points $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $\mu \leq \sum_{i=1}^n (A_i x_i) \leq \mu + \omega$ avec $\omega = \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} (|A_i|)$.

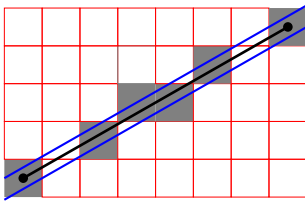
7. $|X|$ indique la valeur absolue de X .

Quant à l'hyperplan supercouverture[29, 85], il est équivalent à l'hyperplan analytique fermé et standard. Il est défini par :

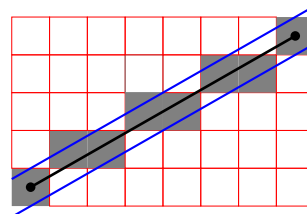
Définition 26. (Hyperplan supercouverture[29, 85]) L'hyperplan supercouverture de paramètres $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ défini par

$$-\frac{\sum_{i=1}^n |A_i|}{2} \leq A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i \leq \frac{\sum_{i=1}^n |A_i|}{2}$$

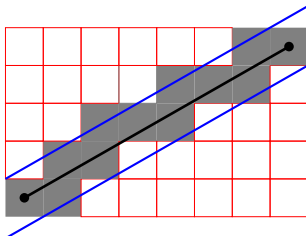
La figure 1.37 illustre respectivement une droite mince en 1.37a, une droite naïve en 1.37b, une droite standard en 1.37c, une droite supercouverture en 1.37d et une droite épaisse en 1.37e.



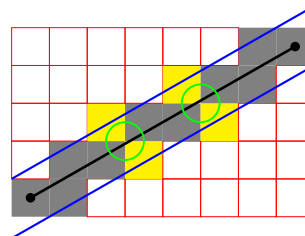
(a) Mince : $-\frac{|4|}{2} \leq 4x - 7y + 13.5 \leq \frac{|4|}{2}$



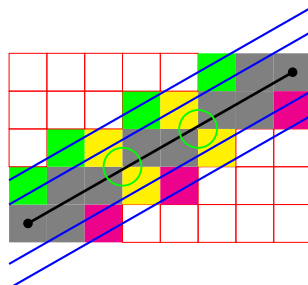
(b) naïf : $-\frac{\max(|4|, |7|)}{2} \leq 4x - 7y + 13.5 < \frac{\max(|4|, |7|)}{2}$



(c) standard : $-\frac{|4|+|7|}{2} \leq 4x - 7y + 13.5 < \frac{|4|+|7|}{2}$



(d) supercouverture : $-\frac{|4|+|7|}{2} \leq 4x - 7y + 13.5 \leq \frac{|4|+|7|}{2}$ avec $\omega = 11$



(e) droite épaisse : $-10 \leq 4x - 7y + 13.5 \leq 10$ avec $\omega = 20$

FIGURE 1.37 – Droites analytiques

Quant à l'hyperplan analytique pythagoricien, il est défini par :

Définition 27. (Hyperplan analytique pythagoricien[86]) L'hyperplan pythagoricien de paramètres $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant :

$$0 \leq A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |A_i|^2}$$

La figure 1.38 illustre un plan analytique naïf et un plan analytique standard en dimension 3.

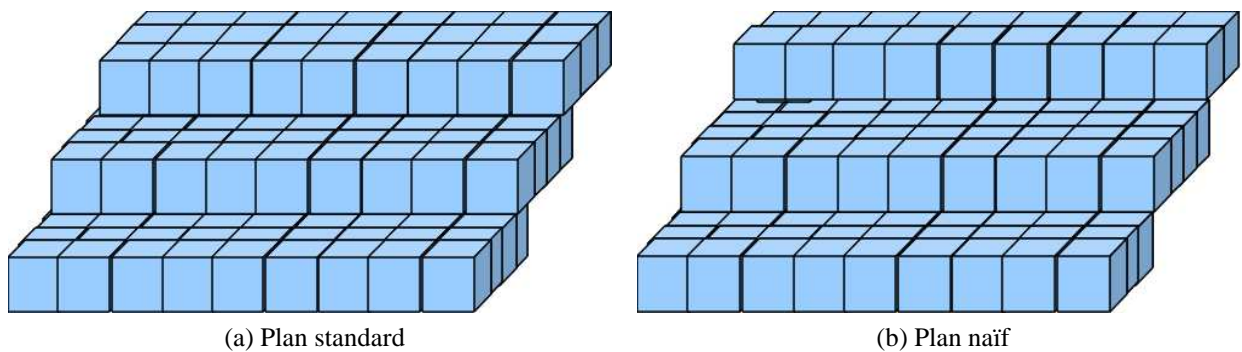


FIGURE 1.38 – Plan analytique standard en 1.38a et plan analytique naïf en 1.38b.

Algorithme de tracé d'un hyperplan analytique discret A partir de la définition de l'hyperplan analytique, la programmation nécessite le passage à la forme algorithmique.

Algorithme 1.2 Tracé d'un hyperplan analytique discret

DONNÉES :

- Soit S un ensemble de m pavés $P_1, P_2, \dots, P_{m-1}, P_m$ constituant l'espace image en dimension n pouvant contenir le tracé. Chaque pavé P_i est centré $(x_1^{P_i}, x_2^{P_i}, \dots, x_{n-1}^{P_i}, x_n^{P_i})$,
- Soient $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ les paramètres de l'hyperplan analytique discret que l'on désire tracer.

DÉBUT

Pour chaque pavé P_i de S .

Calculer ValeurSomme = $\sum_{i=1}^n (A_i x_i^{P_i})$ // faire une boucle

Si $(\mu \leq \text{ValeurSomme})$ et $(\text{ValeurSomme} < \mu + \omega)$ alors

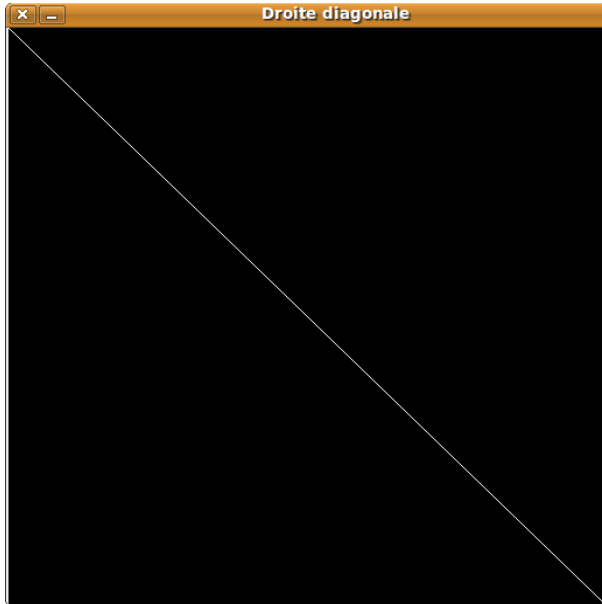
Allumer P_i comme étant un pavé de l'hyperplan analytique

Finsi

FinPour

FIN

Un exemple de tracé d'une droite naïve diagonale est présenté dans la figure 1.39 : Une droite naïve diagonale en 1.39a ; cette droite est intégrée dans une image en 1.39b avec son code en 1.39c, écrits avec la librairie OpenCV.



(a) Droite naïve $\leq x - y < 1$



(b) Droite naïve $\leq x - y < 1$

```

1 #include <cv.h>
2 #include <highgui.h>
3 int main(int argc, char** argv)
4 {
5     #include <cv.h>
6     IplImage *im;
7     CvScalar s;
8
9     im = cvLoadImage("debutfemur.png",1);
10
11     /* Initialisation de l'intensité de tous les pixels à 255*/
12     unsigned char* pteur = (unsigned char*)im->imageData;
13     int fin = im->width*im->height;
14
15     s.val[0]=0;
16         s.val[1]=0;
17         s.val[2]=255;
18     /* tracé d'une droite diagonale */
19     for(int i=0; i<im->width; i++)
20     for(int j=0; j<im->height; j++)
21     if ((i-j>=0) && (i-j<1)) {
22         cvSet2D(im,j,i,s);
23     }
24     cvNamedWindow( "Droite diagonale", CV_WINDOW_AUTOSIZE );
25     cvShowImage( "Droite diagonale", im);
26     cvWaitKey(0);
27     cvReleaseImage( &im );
28     cvDestroyWindow( "Droite diagonale");
29     exit(0);
30 }

```

(c) Code

FIGURE 1.39 – Droite naïve diagonale

Hypersphères analytiques

Les premières méthodes de définition de cercle discret ont aussi été algorithmiques[38, 37, 35, 12] notamment avec le cercle discret de Bresenham.

Nous rappelons ici la définition d'une hypersphère arithmétique[12, 39].

Définition 28. (*Hypersphère arithmétique analytique discrète* [12]) Soit d la dimension l'espace. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, et $o=(o_1, o_2, \dots, o_d) \in \mathbb{R}^d$. Soit $\omega_1: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_-$ et $\omega_2: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions changement de variables. L'hypersphère arithmétique analytique discrète $S(o, r, \omega_1, \omega_2)$ de centre o et rayon r et de fonction d'épaisseur ω_1, ω_2 , est le sous ensemble de points $v \in \mathbb{Z}^d$ défini par :

$$S(o, r, \omega_1, \omega_2) = \{v \in \mathbb{Z}^d \mid \omega_1(v) \leq \sum_{i=1}^d (v_i - o_i)^2 - r^2 < \omega_2(v)\}$$

L'hypersphère analytique discrète [12, 86] est un cas particulier de l'hypersphère arithmétique analytique discrète.

Définition 29. (*Hypersphère analytique discrète* [12]). Soit d la dimension de l'espace. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, $o=(o_1, o_2, \dots, o_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. L'hypersphère analytique discrète $S(o, r, \omega)$ de centre o et de rayon r et d'épaisseur arithmétique ω , est le sous ensemble de points $v \in \mathbb{Z}^d$ défini par

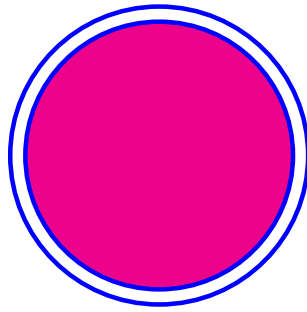
$$S(o, r, \omega) = \{v \in \mathbb{Z}^d \mid (r - \frac{\omega}{2})^2 \leq \sum_{i=1}^d (v_i - o_i)^2 < (r + \frac{\omega}{2})^2\}$$

La définition du cercle analytique se déduit de la définition 28 en posant $n=2$. Il en est de même de la définition de la sphère analytique en prenant $n=3$.

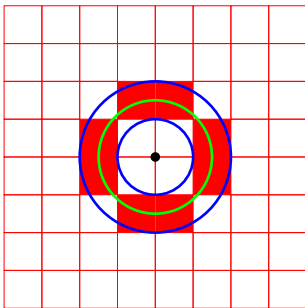
La définition de l'hypersphère analytique reste également un modèle pour l'arc de cercle discret analytique. Il en est de même de l'arc de l'hypersphère en dimension supérieure.

La définition d'un k -arc généralise la définition d'un arc de cercle discret ou d'une hypersphère discrète.

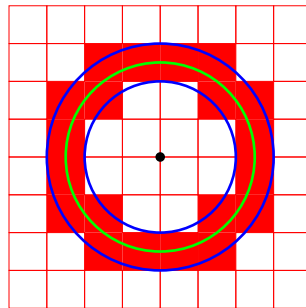
La figure 1.40 montre des exemples de cercles analytiques discrets $\Gamma((a,b), r)$ et d'épaisseur 1 où (a,b) désigne le centre du cercle et r son rayon en 1.40b, 1.40c, 1.40d, 1.40e, 1.40f, 1.40g. En 1.40a, nous avons deux cercles continus permettant de construire un cercle analytique.



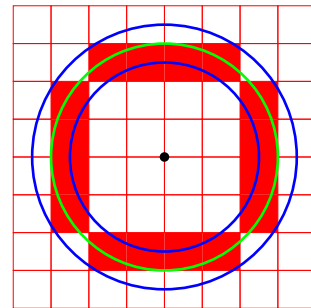
(a)



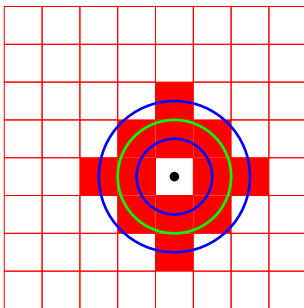
(b) $\Gamma((1,1), 1.5)$ et $\omega=1$



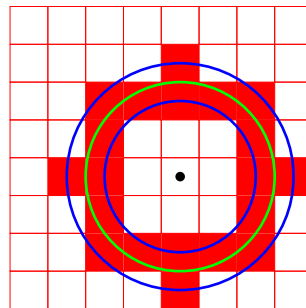
(c) $\Gamma((1,1), 2.5)$ et $\omega=1$



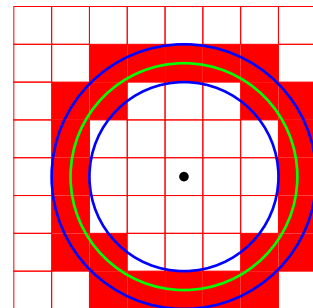
(d) $\Gamma((1,1), 3)$ et $\omega=1$



(e) $\Gamma((1.5,0.5), 1.5)$ et $\omega=1$



(f) $\Gamma((1.5,0.5), 2.5)$ et $\omega=1$



(g) $\Gamma((1.5,0.5), 3)$ et $\omega=1$

FIGURE 1.40 – Cercles analytiques discrets $\Gamma((a,b), r)$ et d'épaisseur l .

Algorithme de tracé d'une hypersphère analytique discrète De même pour l'hypersphère analytique discrète, son tracé passe par une traduction de sa définition sous la forme algorithmique, proposée comme suit :

Algorithme 1.3 Tracé d'une hypersphère analytique discrète

DONNÉES :

- Soit S un ensemble de m pavés pixels P_1, \dots, P_m servant à représenter l'espace image pour le tracé de l'hypersphère analytique en dimension n. Un pavé P_i a pour centre $(x_1^{P_i}, x_2^{P_i}, \dots, x_{n-1}^{P_i}, x_n^{P_i})$,
- Soient n la dimension de l'espace et $r \in \mathbb{R}_+^*$, $o = (o_1, o_2, \dots, o_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

DÉBUT

Pour chaque pavé P_i de S.

Calculer ValeurSomme = $\sum_{i=1}^n (x_i^{P_i} - o_i)^2$

Si $((r - \frac{\omega}{2})^2 \leq \text{ValeurSomme})$ et $(\text{ValeurSomme} < (r + \frac{\omega}{2})^2)$ alors

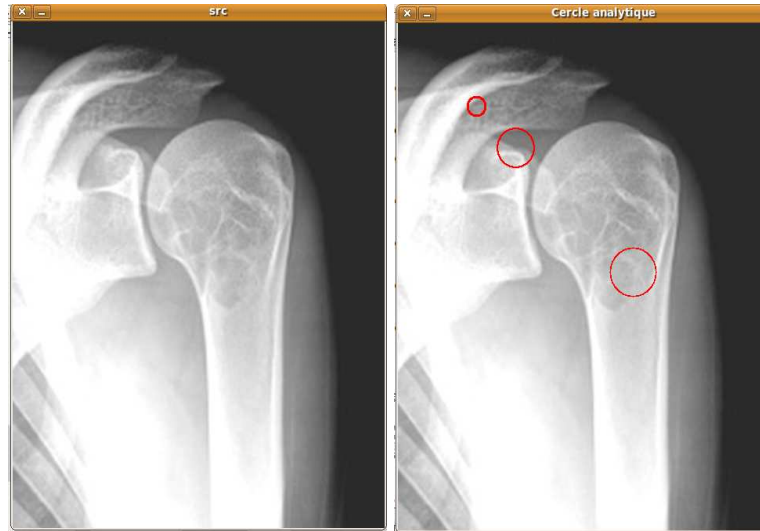
Allumer P_i comme étant un pavé d'une hypersphère analytique

Finsi

FinPour

FIN

La figure 1.41 montre des cercles analytiques intégrés à une image : en 1.41a une image initiale, en 1.41b des cercles discrets analytiques en rouge, intégrés à l'image initiale, implémentés avec la librairie OpenCV en 1.41c.



(a)

(b)

```

4 #include <opencv2/imgproc/imgproc.hpp>
5 #include <opencv2/highgui/highgui.hpp>
6 #include <string>
7 #include <vector>
8 #include <math>
9
10 int main(int argc, char** argv)
11 {
12     CvScalar s;
13     IplImage* newImg; // original image
14     newImg = cvLoadImage("debutfemur.png",1);
15     int fin = newImg->width*newImg->height;
16
17     s.val[0]=0;
18     s.val[1]=0;
19     s.val[2]=255;
20
21     for(int i=0; i<newImg->width; i++)
22     for(int j=0; j<newImg->height; j++)
23     if (((i-100)*(i-100)+(j-100)*(j-100))>=100 && ((i-100)*(i-100)+(j-100)*(j-100)<=164)) {
24         cvSet2D(newImg,j,i,s);
25     }
26
27     for(int i=0; i<newImg->width; i++)
28     for(int j=0; j<newImg->height; j++)
29     if (((i-150)*(i-150)+(j-150)*(j-150))>=500 && ((i-150)*(i-150)+(j-150)*(j-150)<=600)) {
30         cvSet2D(newImg,j,i,s);
31     }
32
33     for(int i=0; i<newImg->width; i++)
34     for(int j=0; j<newImg->height; j++)
35     if (((i-300)*(i-300)+(j-300)*(j-300))>=800 && ((i-300)*(i-300)+(j-300)*(j-300)<=900)) {
36         cvSet2D(newImg,j,i,s);
37     }
38
39     cvNamedWindow( "Cercle analytique", CV_WINDOW_AUTOSIZE );
40     cvShowImage( "Cercle analytique", newImg);
41     cvWaitKey(0);
42     cvReleaseImage( &newImg );
43     cvDestroyWindow( "Cercle analytique");
44     exit(0);
45 }

```

(c)

FIGURE 1.41 – Cercles discrets analytiques dans une image

Dans les définitions des primitives d’hyperplans et d’hypersphères analytiques, nous utilisons l’ensemble \mathbb{Z}^n pour représenter les points discrets. Comment étendre ces définitions aux cas où nous avons des points isolés de \mathbb{R}^n , notamment dans le cas de grilles isothétiques où le pavé est centré en un point de \mathbb{R}^n ? Comment élaborer la discrétisation analytique des polynômes, des courbes et des

surfaces continues ? Quelle est la discrétisation analytique des coniques ? Pour élucider ces questions, des travaux ont été réalisés par Isabelle et al.[113] pour aboutir à une définition analytique d'une parabole discrète. Cette définition se situe dans la même logique que la définition de l'hypersphère discrète arithmétique[12, 86, 39] qui a conduit à la définition du cercle discret arithmétique.

Parabole discrète

Définition 30. (*Parabole discrète arithmétique*[113]) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré 2 à une inconnue. Soit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $\tilde{f}(x) = f(x_1) - x_2$. Soit une fonction $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Une parabole discrète arithmétique d'épaisseur ω est le sous-ensemble $P(\tilde{f}, \omega)$ de points de \mathbb{Z}^2 vérifiant :

$$P(\tilde{f}, \omega) = \{x \in \mathbb{Z}^2, -\frac{\omega(x)}{2} \leq \tilde{f}(x) < \frac{\omega(x)}{2}\}.$$

Isabelle et al. [113] ont introduit des définitions de paraboles discrètes naïves et de paraboles discrètes standard.

Nous allons nous intéresser maintenant aux techniques de discrétisation d'une courbe ou d'une surface continue quelconque.

Discrétisation d'une courbe ou d'une surface

La discrétisation consiste à obtenir un ou plusieurs objets discrets à partir d'un objet continu. Plusieurs techniques de discrétisation existent pour un contour continu : la discrétisation au plus proche, la discrétisation interne, la discrétisation extérieure[66, 134]. Ces méthodes permettent de discrétiser des contours fermés continus soit par des points discrets internes ou externes ou en ne s'intéressant qu'aux points discrets proches du contour continu.

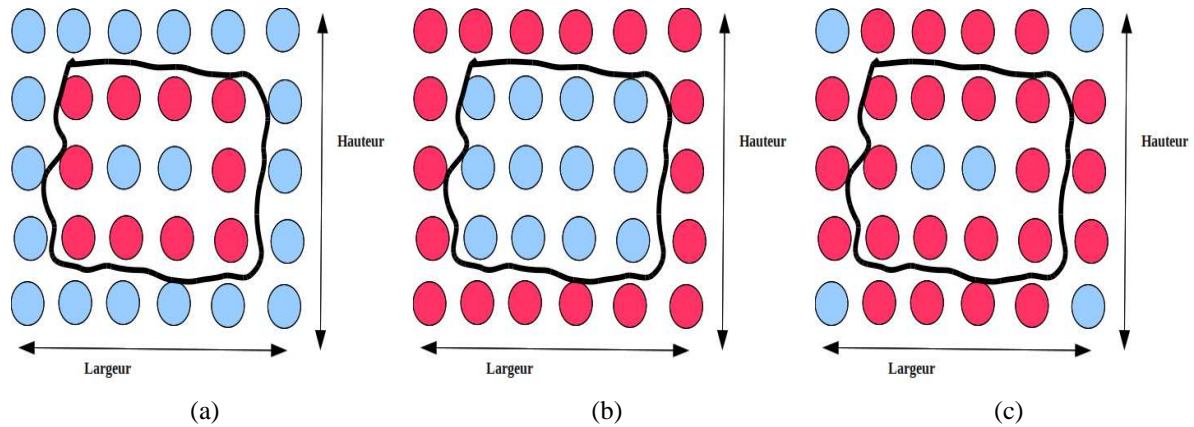


FIGURE 1.42 – Quelques techniques de discrétisation

Le problème avec l'application de ces méthodes est qu'une courbe ou une surface peut être non fermée, rectiligne, tantôt concave, tantôt convexe sur certaines parties. Dans ce cas, nous faisons un choix entre ces méthodes à adopter pour chaque partie.

Quelque soit la discrétisation interne ou externe, les points discrets proches de la courbe continue en terme de distance sont sélectionnés mais du côté interne ou externe respectivement. Ainsi, la discrétisation des contours continus est établie en fonction de la notion de distance.

Définition 31. (*Discrétisation d'un objet continu*[86]). Soit un E objet continu en dimension n et d une distance, la discrétisation de E notée $D_d(E)$ associée à la distance d est définie par : $D_d(E) = \{p \in \mathbb{Z}^n \mid d(p, E) \leq \frac{\alpha}{2}\}$ avec $\alpha \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Cette définition 31 inclut les trois techniques de discrétisation citées précédemment. En effet, les points discrets internes ou externes sont proches de la courbe par rapport à la notion de distance. La valeur de α définit l'épaisseur de la courbe discrète. Il s'en suit que nous obtenons une définition analytique des courbes discrètes ou des surfaces discrètes quelconques.

La figure 1.43 donne une illustration d'une courbe discrète analytique construite à partir d'une courbe continue en couleur verte. Les points discrets en rouge représentent la courbe discrète analytique.

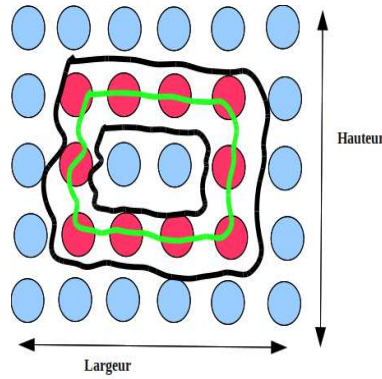


FIGURE 1.43 – Courbe discrète analytique

La définition 31 est aussi générale, dans la mesure où $d(p, E)$ peut indiquer plusieurs distances telles que la distance de Manhattan d_1 , la distance euclidienne d_2 , la distance de Tchebychev d_∞ donnant respectivement le modèle naïf, le modèle pythagoricien et le modèle supercouverture et standard[86]. Elle généralise ainsi le modèle naïf, le modèle standard, le modèle supercouverture[85] et le modèle pythagoricien pour n'importe quelle courbe ou surface discrète.

La distance peut être définie avec la notion de boule.

Définition 32. (Boule fermée[86]) Soient d une distance et E un espace affine ; soit x un élément de E . On appelle boule fermée de centre x et de rayon r l'ensemble des points $B_d(x, r) = \{y \in E / d(x, y) \leq r\}$.

La boule fermée de rayon $\frac{1}{2}$ est alors définie par $B_d(x, \frac{1}{2})$. En posant $B_d(\frac{1}{2})$ indépendamment de x . On obtient alors :

$$E \oplus B_d(\frac{1}{2}) = \{y / \exists x \in E, y \in B_d(x, \frac{1}{2})\} \quad (1.1)$$

où \oplus indique la somme de Minkowski.

Nous avons $D_d(E) = (E \oplus B_d(\frac{1}{2})) \cap \mathbb{Z}^n$

La boule fermée associée aux distances d_1 , d_2 et d_∞ correspond respectivement à des formes géométriques de carrés en rouge, de cercles en bleu et losanges en vert, illustrées par la figure 1.44

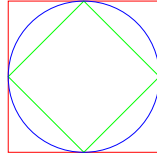


FIGURE 1.44 – Boule fermée

Le modèle naïf est basé sur une discrétisation utilisant la distance de Manhattan d_1 [86]⁸. La boule $B_{d_1}(\frac{1}{2})$ associée à la distance d_1 est un carré de côté $\frac{\sqrt{2}}$. La construction discrète consiste à retenir les hypervoxels dont les hypervoxels internes sont traversés par un hyperplan continu.

La figure 1.45 illustre le cas de droite naïve en 1.45a et 1.45b . Quant à la droite standard, elle est construite en considérant les pixels traversés par une droite continue comme nous pouvons le voir dans la figure 1.45 avec 1.45c et 1.45d.

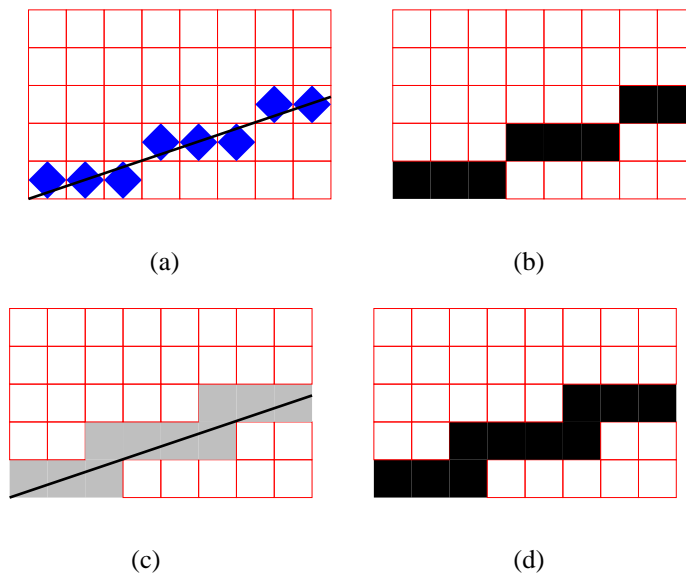


FIGURE 1.45 – Discrétisation naïve et standard .

Le modèle supercouverture d'une courbe (resp . une surface continue) est obtenu en sélectionnant tous les pavés touchés par cette courbe (resp, cette surface)[29, 85]. Ainsi, le modèle supercouverture

8. Soient $A(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, $B(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n)$ deux points de \mathbb{R}^n la distance de Manhattan d_1 est définie par $d_1(A, B) = \sum_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i|$.

permet d'envelopper la courbe continue ou la surface continue dans une aire construite à partir des pavés, d'où le nom supercouverture.

Par analogie à l'hyperplan analytique, plusieurs variantes d'hypersphères analytiques ont été établies notamment l'hypersphère naïve, standard et supercouverture. En appliquant la discrétisation de l'hypersphère continue avec les différentes notions liées à la définition d'une boule, nous aboutissons au modèle naïf, standard et supercouverture. Ainsi en dimension 2, lorsque le cercle continu touche le losange interne d'un pixel alors ce pixel est retenu, nous sommes dans une situation de cercle naïf. Les cercles standard et supercouverture sont construites en prenant en compte comme discrétisation des carrés ou pixels touchés par un cercle continu.

La figure 1.46 montre les différentes boules dans le cas d'un cercle naïf en 1.46a, d'un cercle standard en 1.46b, et d'un cercle supercouverture en 1.46c.

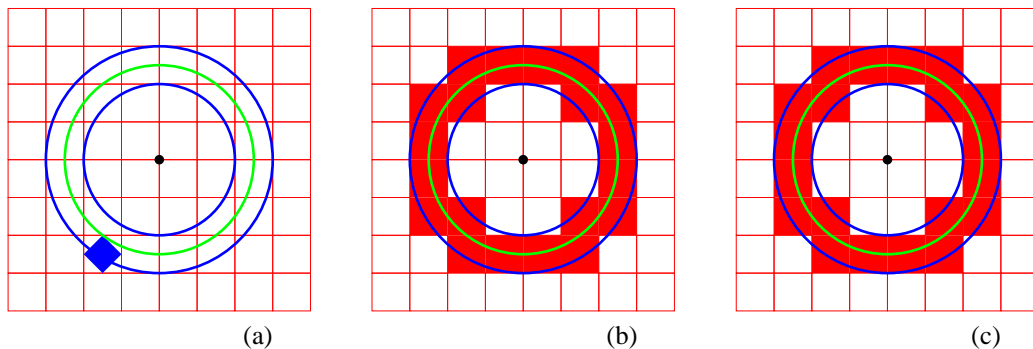


FIGURE 1.46 – $\Gamma((1,1), 2.5)$ et $\omega=1$

Divers objets géométriques peuvent être utilisés en remplaçant la boule fermée par des polytopes convexes ou concaves pour généraliser.

Plusieurs variantes de la définition d'un segment bruité ont également été présentées par Isabelle [113]. Nous rappelons la définition d'un segment flou selon [113].

Définition 33. (*Segment flou* [113, 56]) Soit S_f une suite de points \mathbb{Z}^2 . S_f est un segment flou, s'il existe une droite $D(a,b, \mu, \omega)$ englobante pour S_f c'est-à-dire si tous les points de S_f appartiennent à D .

La figure 1.47 montre un segment flou selon Isabelle et al.[113, 109], représenté par une suite de pixels en gris c'est-à-dire un segment flou 0-connexe.

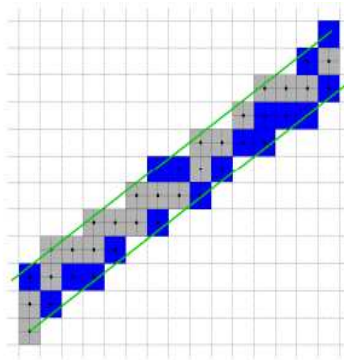


FIGURE 1.47 – *Un segment flou selon [113].*

Comment réaliser la reconnaissance des hyperplans et des hypersphères analytiques notamment des droites, des arcs de cercle, et des cercles analytiques bruités ? Pour répondre à cette question, dans la section 1.4 nous définissons quelques techniques de reconnaissance de formes géométriques basées sur la transformée de Hough, en précisant leurs insuffisances.

1.4 Reconnaissance de Formes discrètes

La forme est une caractéristique des contours d'une image. En traitement d'images, il existe des filtres pour extraire les contours d'une image. Cette extraction constitue une première étape. C'est en partant des contours extraits que les techniques de reconnaissance sont appliquées pour identifier des formes géométriques ou des motifs.

Les méthodes de reconnaissance ont été établies en fonction des formes à reconnaître c'est-à-dire pour une droite, un cercle, une ellipse, une parabole, une forme quelconque, il faut utiliser respectivement des méthodes appropriées.

Dans cette section, nous faisons un état de l'art sur les transformées de Hough, utilisées dans la reconnaissance de formes dans une image numérique bruitée. Nous nous intéressons aux concepts de base des méthodes développées dans un espace euclidien. Notons que pour la transformée de Hough, la quantification de l'espace de paramètres a été utilisée pendant longtemps pour adapter le modèle continu à l'espace discret.

1.4.1 Reconnaissance de droites

Transformée de Hough

La transformée de Hough (TH) est une méthode classique introduite par Paul Hough en 1962[20, 68] permettant la reconnaissance de droites dans une image bruitée. Elle est basée sur un espace de paramètres, appelé accumulateur, et un espace image qui correspond à l'image initiale.

Cette méthode est définie dans des espaces continus : elle a été développée, adaptée au modèle discret[69] et étendue à la reconnaissance d'autres formes d'objets discrets comme le cercle discret [13, 72], l'ellipse discret[22, 23, 24, 25, 76], appelée transformée de Hough paramétrée, présentée dans la section 1.4.2. Certaines transformées de Hough sont orientées vers la détection de formes quelconques basées sur une description de l'objet à reconnaître, proposées par D.Ballard[26, 5] que nous allons voir dans la section 1.4.3.

Plusieurs études ont été réalisées sur la transformée de Hough[17, 19, 65, 97]. Une application de la transformée de Hough, pour la détection de droites parallèles et du réseau routier est fournie par Pousset et al.[120].

Une définition unificatrice de la transformée de Hough a également été proposée par Henri Maître[9].

La transformée de Hough des droites est définie par :

Définition 34. (*Transformée de Hough d'un point continu*[1]) Soient I_2 un espace image ($\subset \mathbb{R}^2$) et P un espace de paramètres ($\subset \mathbb{R}^2$). Soient f et g deux fonctions définies par :

La fonction f associe un point de I_2 à une droite de P_2

$$f: \begin{array}{ccc} I_2 & \rightarrow & P_2 \\ M(x_0, x_1) & \mapsto & \{(y_0, y_1) \in P_2 / y_1 = x_1 - x_0 y_0\} \end{array}$$

La fonction g associe un point de P_2 à une droite de I_2

$$g: \begin{array}{ccc} P_2 & \rightarrow & I_2 \\ N(y_0, y_1) & \mapsto & \{(x_0, x_1) \in I_2 / x_1 = y_1 + x_0 y_0\} \end{array}$$

Les images $f(M)$ et $g(N)$ sont appelées respectivement les transformées de Hough de M et N .

La transformée de Hough est une transposition du problème de reconnaissance d'une droite dans l'espace image à un problème de coordonnées de points d'intersection de droites dans l'espace de paramètre, par analogie à d'autres domaines où la résolution du modèle d'un problème donné peut

être transposé à un autre modèle par isomorphisme.

La figure 1.48 illustre cette définition : en 1.48a, des points dans l'espace image, et en 1.48b la Transformée de Hough de ces points dans l'espace de paramètres .

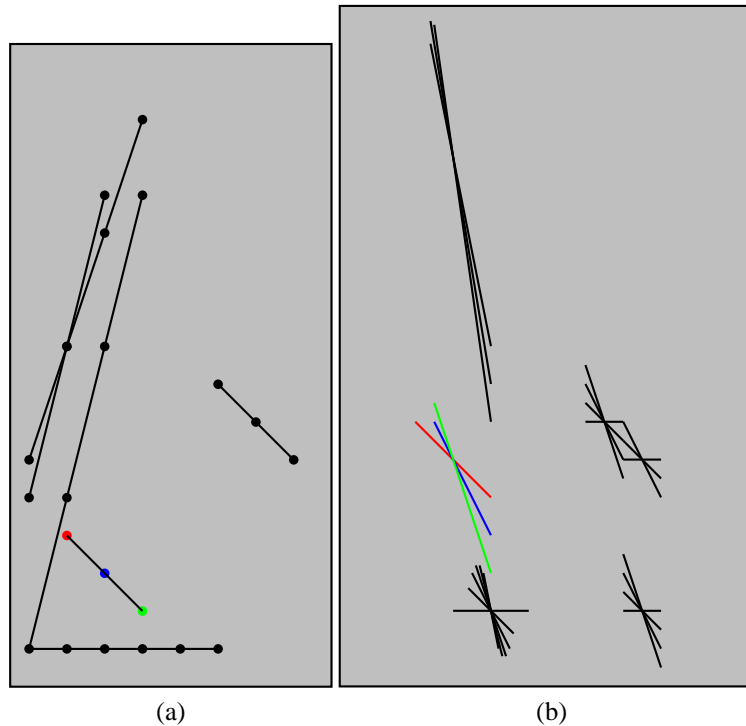


FIGURE 1.48 – Transformée de Hough

Dans la figure 1.48, nous avons en 1.48a, des segments de droites comportant des points alignés ; en 1.48b, nous avons déterminé la transformée de Hough de ces points, et nous observons qu'elles ont en commun un point dont les coordonnées représentent les paramètres de droites, dans l'espace image. En notant $TH(M)$, la transformée de Hough du point M , nous obtenons alors pour un ensemble infini de points $p_i(X_i, Y_i)$ continus alignés sur une droite (D) , un point commun I défini par $\bigcap TH(p_i)$ déterminé par $TH(p_1) \cap TH(p_2)$ par exemple. Cette définition permet d'établir la reconnaissance de droites continues.

En outre, nous remarquons avec cette méthode que deux droites parallèles dans l'espace image ont des points de paramètres alignés verticalement dans l'espace de paramètres. En effet les droites parallèles $D_1 : y=b+ax$ et $D_2 : y=b'+ax$ dans l'espace image correspondent à des points (a, b) et (a, b') dans l'espace de paramètres.

Limites La transformée de Hough, définie dans un espace euclidien \mathbb{R}^2 , n'est pas adaptée au modèle discret pour la détection des droites discrètes parce que les points discrets ne sont pas toujours alignés comme les points continus dans les droites continues. D'où l'importance de la quantification de l'espace de paramètre pour intégrer le cas discret. Pendant longtemps les chercheurs ont proposé plusieurs variantes de quantification de l'espace de paramètres sans préciser la nature exacte des droites discrètes recherchées.

De plus, avec le modèle de la transformée de Hough des droites dans un espace continu se pose le problème de la détection des droites verticales. Étant donné que nous travaillons dans un espace de paramètres de taille limitée, la détection des droites verticales conduit, avec une équation de la forme $y=mx+c$, à faire tendre m vers ∞_+ ou ∞_- , idem pour c .

Avec la transformée de Hough standard, nous avons un espace de paramètres borné rendant aisé la détection de droites verticales.

Martine Dexet[1] a proposé une méthode de reconnaissance de droites analytiques.

Espace dual généralisé

Dans sa thèse en 2006, Martine Dexet[1] a étendu la transformée de Hough des droites pour proposer une méthode de reconnaissance des hyperplans analytiques naïfs, standard, supercouvertures.

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions issues des travaux de Martine Dexet[1] qui seront étendus dans les chapitres 3 et 4.

Définition 35. (Dual d'un point[1]) Soient I_n et P_n respectivement un espace image et un espace de paramètres des sous ensembles de \mathbb{R}^n . Soient D_I et D_P deux fonctions tels que :

La fonction D_{I_n} associe un point de I_n à un hyperplan dans I_n

$$D_{I_n} : \begin{array}{ccc} I_n & \rightarrow & P_n \\ M(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) & \mapsto & \{(y_0, y_1, \dots, y_n) \in I_n / y_n = x_n - \sum_{0 \leq i \leq n-1} x_i y_i \} \end{array}$$

La fonction D_{P_n} associe un point de P_n à un hyperplan dans I_n

$$D_{P_n} : \begin{array}{ccc} P_n & \rightarrow & I_n \\ N(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) & \mapsto & \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in P_n / x_n = y_n + \sum_{0 \leq i \leq n-1} x_i y_i \} \end{array}$$

Les fonctions $D_{I_n}(M)$ et $D_{P_n}(N)$ sont appelés les duals de M et N .

Proposition 36. ([1]) Soit p un points de I_n (respectivement P_n) tels que $p' \in \text{dual}(p)$. On a alors $p \in \text{dual}(p')$.

Démonstration. Soit $p(x_0, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ un points de I_n (respectivement P_n) tels que $p' \in \text{dual}(p)$. En posant $p' (x'_0, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x'_n)$, nous avons $x'_n = x_n - \sum_{0 \leq i \leq n-1} x_i x'_i$. D'où $x_n = x'_n + \sum_{0 \leq i \leq n-1} x_i x'_i$ et $p \in \text{dual}(p')$. \square

Cette définition 35 permet de construire le dual d'un objet [1] comme l'union du dual de chacun de ses points :

Définition 37. (Dual d'un objet [1]) Soit O un objet de I_n ou P_n . Le dual de O est l'ensemble des points définis par $\text{Dual}(O) = \bigcup_{p \in O} \text{Dual}(p)$

Proposition 38. (Union des objets [1]) Soient O_1 et O_1 deux objets de I_n ou P_n .

On a $\text{dual}(O_1 \cup O_1) = \text{dual}(O_1) \cup \text{dual}(O_1)$.

A partir de la proposition 38, on déduit la proposition suivante sur l'inclusion des objets :

Proposition 39. (Inclusion des objets [1]) Soient O_1 et O_1 deux objets de I_n ou P_n tels que $O_1 \subseteq O_1$. On a $\text{dual}(O_1) \subseteq \text{dual}(O_1)$.

Démonstration. Soient O_1 et O_1 tels que $O_1 \subseteq O_1$. Soit $p \in O_1$ alors $\text{dual}(p) \subseteq \text{dual}(O_1)$ alors on aura aussi $\text{dual}(p) \subseteq \text{dual}(O_2)$ car $O_1 \subseteq O_1$ \square

A partir de la définition 37, Martine Dexet a introduit le dual d'un polytope et particulièrement le dual d'un hypervoxel correspond en dimension 2, au dual d'un pixel, et en dimension 3, au dual d'un voxel.

Définition 40. (Dual d'un pixel [1]) Soit $p(p_1, p_2)$ un pixel centré en (p_1, p_2) de I_2 . Le dual de p est défini l'ensemble des points $(a, b) \in P_2$ vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} p_1 - \frac{L}{2} \leq x \leq p_1 + \frac{L}{2} \\ p_2 - \frac{l}{2} \leq y \leq p_2 + \frac{l}{2} \\ b = y - ax \end{cases}$$

Si a est strictement positif, nous obtenons alors

$$p_2 - \frac{1}{2} - a(p_1 + \frac{1}{2}) \leq y - ax \leq p_2 + \frac{1}{2} - a(p_1 - \frac{1}{2}) \quad (1.2)$$

Et finalement

$$p_2 - \frac{1}{2} - a(p_1 + \frac{1}{2}) \leq b \leq p_2 + \frac{1}{2} - a(p_1 - \frac{1}{2}) \quad (1.3)$$

Sinon (a est négatif) b vérifie l'inéquation :

$$p_2 - \frac{1}{2} - a(p_1 - \frac{1}{2}) \leq b \leq p_2 + \frac{1}{2} - a(p_1 + \frac{1}{2}) \quad (1.4)$$

Ainsi, nous obtenons la représentation du dual d'un pixel illustrée par la figure 1.49 : en 1.49a un pixel (0,0) et en 1.49b son dual.

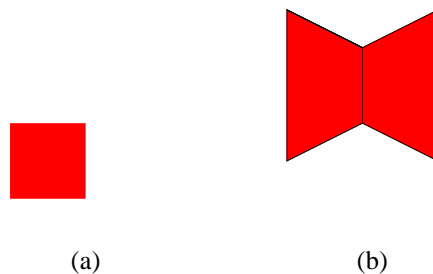


FIGURE 1.49 – dual d'un pixel

Définition 41. (Préimage généralisée[1])

Soit $P = \{P_1, P_2, \dots, P_{k-1}, P_k\}$ un ensemble de k n -polytopes avec $k \in \mathbb{N}^*$. La préimage généralisée de

P est définie par $GP(P) = \bigcap_{1 \leq i \leq k} Dual(P_i)$.

La notion de préimage généralisée est fondamentale car elle est la base de la reconnaissance des hyperplans analytiques naïfs, standard et supercouverture.

La figure 1.50 illustre la préimage généralisée de trois pixels. Comme nous pouvons le voir, nous obtenons un polygone dans l'espace de paramètres.

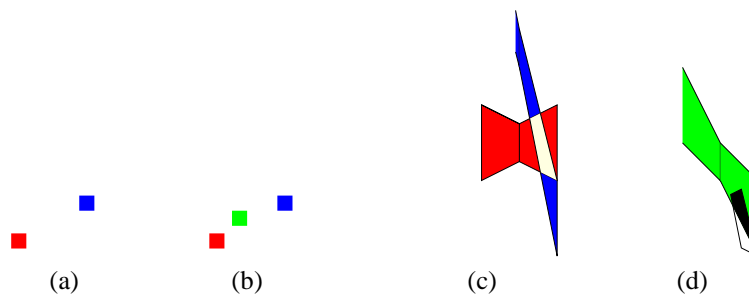


FIGURE 1.50 – Préimage de trois pixels

Limites L'espace dual généralisé est une méthode de reconnaissance de droite discrète naïve et standard. Durant plusieurs années, les chercheurs ont établis des méthodes de reconnaissances de droites discrètes partant de la transformée de Hough des droites basées sur une quantification de l'espace de paramètres, sans spécifier exactement quel type de droite analytique.

L'espace dual généralisé exploite la transformée de Hough des droites à travers la reconnaissance des droites discrètes verticales, dont les paramètres sont difficiles à représenter dans un espace de paramètres borné. Cette méthode ne cherche pas forcément à représenter un espace de paramètres, mais à mémoriser les paramètres des polytopes comme ses sommets. Dans tous les cas, le type de donnée utilisé pour la représentation des coordonnées des sommets occupe de l'espace mémoire.

L'espace dual généralisé est applicable dans le cas de grilles irrégulières, car il suffit de déterminer le dual des pavés concernés.

Nous allons étendre l'espace dual généralisé en proposant dans le chapitre 3 le dual de certaines formes géométriques et étudier l'intersection des hyperplans analytiques par composition.

Transformée de Hough standard

La transformée de Hough standard (THS) [7] est une méthode de reconnaissance de droite basée sur l'équation polaire d'une droite contrairement à la transformée de Hough des droites. Elle associe un point de l'espace image à une fonction sinusoidale dans l'espace de paramètres[7]. Plusieurs variantes de la transformée de Hough standard[3, 8, 69] ont été développées : M. Peternell et al. dans [71] utilisent la transformation de Hough standard dans la reconnaissance et la reconstruction des formes 3D.

Elle est définie par :

Définition 42. Soient I et P respectivement un espace image sous ensemble de \mathbb{R}^2 et un espace de paramètres sous ensemble de \mathbb{R}^2 . Soit $M(x, y)$ un point de I . La transformée de Hough standard de M est l'ensemble des points de $S(M)$ dans P défini par $S(M) = \{(\theta, r) \in \rho^2 / r = x * \cos\theta + y * \sin\theta\}$ ⁹.

La figure 1.51 présente la THS des points A, M et C de l'espace image (en 1.51a) et l'espace de paramètres en 1.51b.

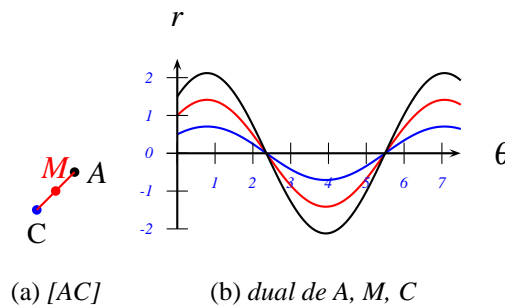


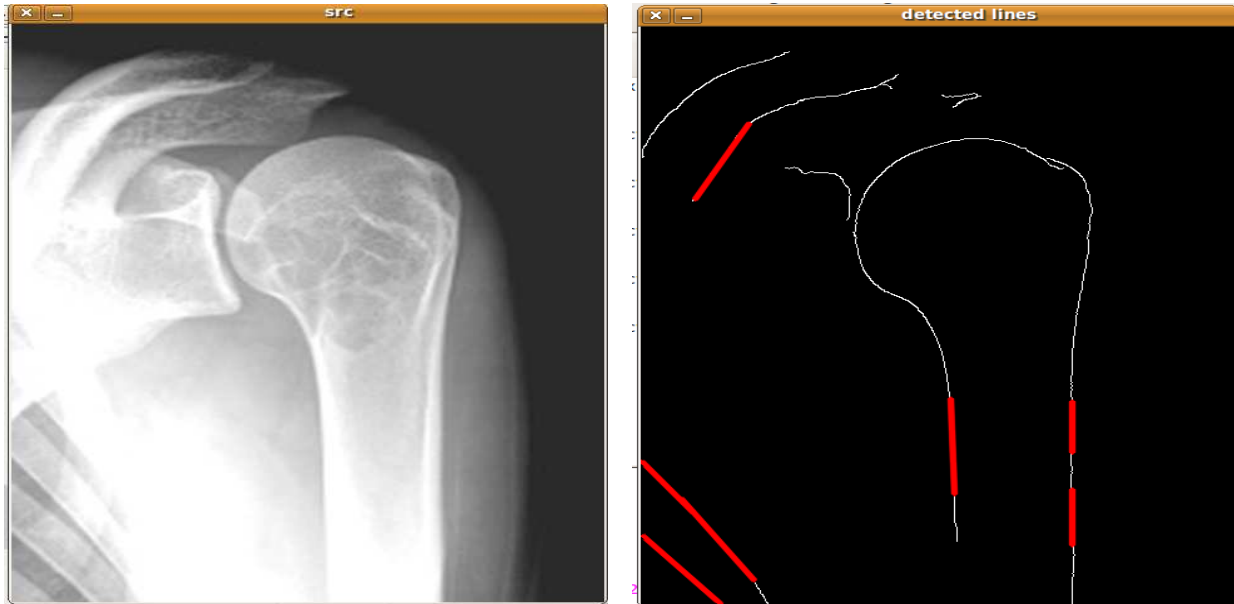
FIGURE 1.51 – Transformée de Hough standard

Limites Cette méthode définie dans un espace euclidien ne permet pas la reconnaissance de droites discrètes. Plusieurs variantes de la transformée de Hough standard ont été proposées. Un espace de paramètres, avec une quantification adéquate est proposé par Linfeng Guo et al [125] permettant une meilleure détermination des droites discrètes, en réduisant l'influence de la discrétisation de l'image, sur la transformée de Hough standard.

Dans cette thèse, nous proposons une méthode étendant la transformée de Hough standard pour obtenir la reconnaissance des droites naïves et standard dans le chapitre 4.

9. * indique une multiplication

Les figures 1.52 et 1.53 montrent des applications de la transformée de Hough standard et de la transformée de Hough probabiliste avec la librairie OPENCV.



(a)

(b)

```

10 } int main(int argc, char** argv)
11 {const char* filename = argc >= 2 ? argv[1] : "debutfemur.png";
12 Mat src = imread(filename, 0);
13 if(src.empty())
14 {help();
15 cout << "can not open " << filename << endl;
16 return -1;
17 }
18 Mat dst, cdst;
19 Canny(src, dst, 50, 200, 3);
20 cvtColor(dst, cdst, CV_GRAY2BGR);
21 #if 0
22 vector<Vec2f> lines;
23 HoughLines(dst, lines, 1, CV_PI/180, 100, 0, 0 );
24 for( size_t i = 0; i < lines.size(); i++)
25 {
26 float rho = lines[i][0], theta = lines[i][1];
27 Point pt1, pt2;
28 double a = cos(theta), b = sin(theta);
29 double x0 = a*rho, y0 = b*rho;
30 pt1.x = cvRound(x0 + 1000*(-b));
31 pt1.y = cvRound(y0 + 1000*(a));
32 pt2.x = cvRound(x0 - 1000*(-b));
33 pt2.y = cvRound(y0 - 1000*(a));
34 line( cdst, pt1, pt2, Scalar(0,0,255), 3, CV_AA);
35 }
36 #else
37 vector<Vec4i> lines;
38 HoughLinesP(dst, lines, 1, CV_PI/180, 50, 50, 10 );
39 for( size_t i = 0; i < lines.size(); i++)
40 {Vec4i l = lines[i];
41 line( cdst, Point(l[0], l[1]), Point(l[2], l[3]), Scalar(0,0,255), 3, CV_AA);
42 }
43 #endif
44 imshow("source", src);
45 imshow("detected lines". cdst);

```

(c) Code

FIGURE 1.52 – Droites discrètes obtenues par la transformée de Hough probabiliste en 1.52b.



(a)

(b)

```

21 Mat dst, cdst;
22 Canny(src, dst, 50, 200, 3);
23 cvtColor(dst, cdst, CV_GRAY2BGR);
24 #if 0
25 vector<Vec2f> lines;
26 HoughLines(dst, lines, 1, CV_PI/180, 100, 0, 0 );
27 for( size_t i = 0; i < lines.size(); i++ )
28 {
29 float rho = lines[i][0], theta = lines[i][1];
30 Point pt1, pt2;
31 double a = cos(theta), b = sin(theta);
32 double x0 = a*rho, y0 = b*rho;
33 pt1.x = cvRound(x0 + 1000*(-b));
34 pt1.y = cvRound(y0 + 1000*(a));
35 pt2.x = cvRound(x0 - 1000*(-b));
36 pt2.y = cvRound(y0 - 1000*(a));
37 line( cdst, pt1, pt2, Scalar(0,0,255), 3, CV_AA);
38 }
39 #else
40 vector<Vec2f> lines;
41 HoughLines(dst, lines, 1, CV_PI/180, 100, 0, 0 );
42 for( size_t i = 0; i < lines.size(); i++ )
43 {
44 float rho = lines[i][0], theta = lines[i][1];
45 Point pt1, pt2;
46 double a = cos(theta), b = sin(theta);
47 double x0 = a*rho, y0 = b*rho;
48 pt1.x = cvRound(x0 + 1000*(-b));
49 pt1.y = cvRound(y0 + 1000*(a));
50 pt2.x = cvRound(x0 - 1000*(-b));
51 pt2.y = cvRound(y0 - 1000*(a));
52 line(cdst, pt1, pt2, Scalar(0,0,255), 3, CV_AA);
53 }
54
55 #endif
56 imshow("source", src);

```

(c) Code

FIGURE 1.53 – Droites discrètes obtenues par la transformée de Hough standard en 1.53b.

Comment reconnaître un arc de cercle discret ou un cercle discret ? Plusieurs méthodes ont été proposées.

1.4.2 Reconnaissance du cercle

Plusieurs méthodes de reconnaissance de cercles [62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 72, 73, 79, 75, 127][47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 51] ont été établies avec leur spécificité en terme de précision de la détection, et de complexité temporelle. Certaines méthodes ne sont pas adaptées à la reconnaissance de arcs discrets comme la méthode de sauer [62]. Les premières méthodes définitions de cercles discrets ont aussi été algorithmiques notamment avec la définition du cercle de Bresenham en 1977[35]. Une définition d'une méthode de reconnaissance de cercle discret est basée sur la définition d'un modèle de representation de cercle discret [61],

Nous présentons dans cette section la transformée de Hough paramétrée et la médiatrice généralisée qui sont utiles pour la compréhension des chapitres trois et quatre.

Transformée de Hough paramétrée

La transformée de Hough paramétrée est basée sur l'équation des formes géométriques : certaines variables sont considérées comme des variables de l'espace image et d'autres, des variables de l'espace de paramètres. A titre d'exemple, la reconnaissance du cercle d'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ prend en compte la reconnaissance d'arcs de cercle avec a, b des variables de l'espace de paramètres.

Plusieurs travaux ont été réalisés sur le cercle discret en adaptant la transformée de Hough [40, 42, 75].

Limites Son application engendre un espace de paramètres à trois paramètres a, b, r. Par conséquent, nous obtenons un problème non linéaire. Nous aboutissons à un espace de paramètres à 4 paramètres a, b, c, r avec l'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ pour des formes sphériques.

Certaines méthodes comme [68] permettent d'améliorer la complexité temporelle de la reconnaissance d'arcs de cercles discrets. La transformée de Hough paramétrée est basée sur l'équation paramétrique de l'objet à reconnaître faisant ressortir les paramètres ou les variables de l'espace de paramètres. Dans le cas d'une hypersphère, nous avons l'équation $\sum_{i=0}^{i=n} (x_i - a_i)^2 = R^2$. Le nombre de paramètres augmentent suivant le nombre de variables de l'équation.

Cette méthode s'étend à la reconnaissance d'une ellipse et d'autres courbes paramétriques où la forme est clairement définie par une équation euclidienne.

Médiatrice généralisée

Une base théorique de la médiatrice généralisée a été établie par Martin Peternell dans [59] en dimension 2 et 3 notamment la médiatrice généralisée point-courbe, la médiatrice généralisée courbe-courbe et la médiatrice surface-surface.

La médiatrice généralisée point-droite est nécessaire à la construction de la médiatrice généralisée de pavés polytopes. Cette médiatrice généralisée point-droite est une parabole illustrée par la figure 1.54. Nous voyons dans cette figure 1.54 le point F, le foyer de la parabole et la droite D, la directrice de la parabole.

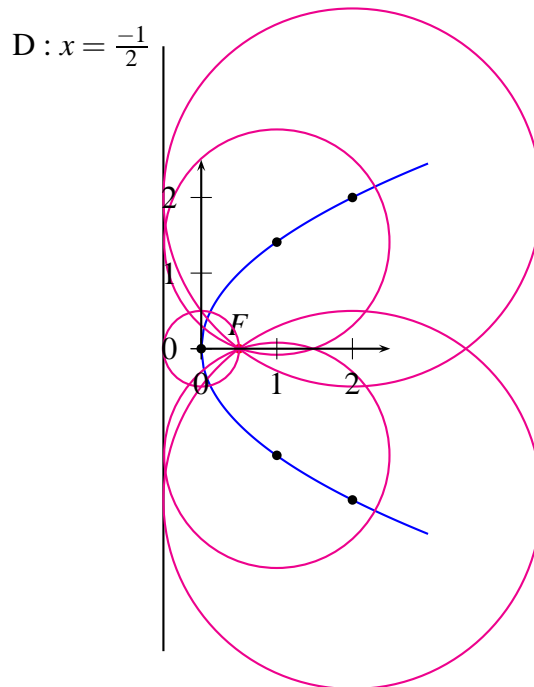


FIGURE 1.54 – Parabole

Elle correspond à une surface parabolique en dimension 3.

Dans le chapitre 3.2, nous proposons une application de la médiatrice généralisée pour assurer la reconnaissance de cercles analytiques bruités.

La forme est définie par une équation mathématique dans les méthodes paramétriques. Comment définir une forme quelconque et comment réaliser la reconnaissance d'une forme quelconque ?

1.4.3 Reconnaissance de formes quelconques

Descripteurs de formes

Dans une image, nous pouvons être intéressé par la reconnaissance de certaines formes quelconques dont la définition mathématique est complexe car ces formes sont différentes par leur taille ou leur orientation comme nous pouvons le voir dans la figure 1.55.

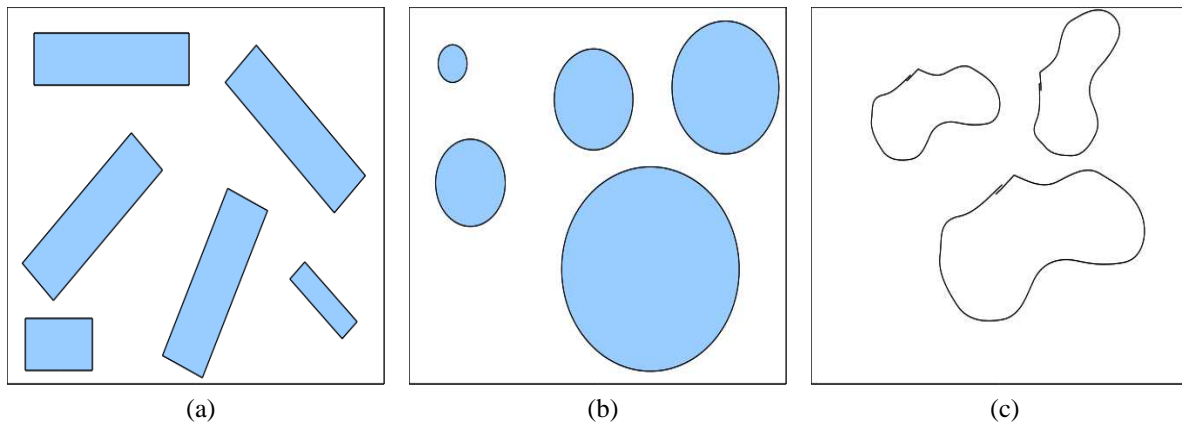


FIGURE 1.55 – *Formes quelconques*

Ces formes sont différentes si l'on prend en compte des directions données. Elles sont identiques car elle sont liées par des transformations affines telles que la symétrie centrale, la translation, la symétrie orthogonale, la rotation, les homothéties et les similitudes¹⁰.

Il apparaît nécessaire d'établir des invariants qui permettent de ramener ces formes, à la même instance d'objet, afin d'établir des méthodes de reconnaissance[131]. Ces invariants doivent résister au bruit et aux transformations comme les isométries¹¹. Il est important d'élaborer des descripteurs de formes appropriés.

Il existe plusieurs descripteurs de formes suivant la forme à détecter[108] notamment les descripteurs utilisant les propriétés des contours et des descripteurs utilisant la définition des régions[119]. Les descripteurs de fourier[117, 118] sont des exemples de descripteurs de formes basés sur les caractéristiques des contours.

10. une isométrie est composée d'une rotation et d'une homothétie

11. Une isométrie est une transformation des points de l'espace qui conserve les distances : $AB=A'B'$ avec $I(A)=A'$ et $I(B)=B'$. La symétrie centrale, la translation, la symétrie orthogonale, la rotation sont des isométries.

Transformée de Hough généralisée

La définition de nouvelles représentations des objets discrets ou de nouvelles formes géométriques implique l'établissement de nouvelles méthodes de reconnaissance. La transformée de Hough généralisée a été introduite par D. Ballard [4][5] pour répondre à la reconnaissance des formes quelconques[131]. Elle fait intervenir des descripteurs de formes basés sur les contours pour décrire la forme à reconnaître. Une étude comparative des transformées de Hough généralisées a été établie par Kassim et al. [132]. Une application de cette méthode pour la reconnaissance de l'écriture arabe imprimée a été établie par Sodien Touj et al. dans[108]. Kourosh Khoshelham [44] a utilisé la transformée de Hough généralisée pour la détection des objets 3D.

En perspective, cette méthode peut être étendue à la reconnaissance des courbes analytiques quelconques particulièrement pour les courbes supercouvertures. Pour cela une définition claire des courbes analytiques doit être établie au préalable avec des descripteurs de formes comportant des paramètres ou des invariants qui résistent aux transformations comme les isométries telles que la symétrie centrale, la translation, la symétrie orthogonale, la rotation, les homothéties et les similitudes¹² comme le montre la figure 1.56.

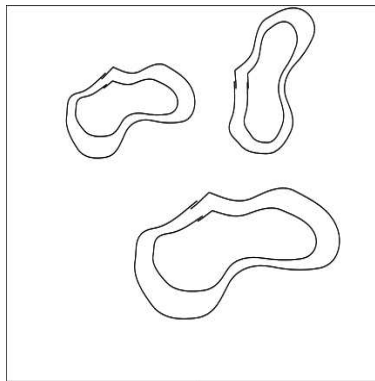


FIGURE 1.56 – *Formes analytiques quelconques*

Remarquons que dans la plus part de ces méthodes, reconnaître une primitive discrète revient à pouvoir déterminer une forme continue associée. Cette technique de reconnaissance de formes est une reconstruction.

12. Une similitude est une composée d'une rotation et d'une homothétie

1.5 Reconstruction

La reconstruction [71, 89] est l'opération inverse de la discrétisation c'est à dire passer d'une représentation discrète à une représentation continue. Une reconstruction est dite invertible, lorsque la discrétisation de la forme continue obtenue permet d'obtenir les objets discrets de départ. Cette méthode est utilisée par la transformée de Hough pour assurer la reconnaissance de droites et de cercles. Reconnaître une forme dans un ensemble d'objets discrets revient à déterminer une forme continue dont la discrétisation peut permettre l'obtention de cet ensemble. Martine Dexet [1] a proposé des méthodes analytiques de reconstruction d'objets discrets invertibles particulièrement en dimension 2 et 3. Marc Rodriguez [88, 114, 115, 116] a proposé également une technique de reconstruction en redimensionnant la taille des pixels.

Nous proposons dans le chapitre 3, une nouvelle méthode de reconstruction, basée sur les algorithmes d'interpolation polynômiale de Lagrange et de Newton [133]. Les méthodes de Lagrange et de Newton permettent une approximation polynômiale de n points continus (points de \mathbb{R}^n) : en dimension 2, à partir de n points continus, on établit un polynôme qui passe par ces n points. L'idée est d'introduire ces méthodes comme des méthodes de reconstruction, en considérant des points discrets. Rappelons la formule d'interpolation de Lagrange par le théorème 43.

Théorème 43. (*Formule d'interpolation de Lagrange* [133])

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . Soient $P_i(x_i, f(x_i))$, une suite de $n+1$ points de \mathbb{R}^2 , avec $i \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}$.

Il existe un polynôme P_n de degré n et un seul tel que :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}, P_n(x_i) = f(x_i).$$

$$\text{Ce polynôme s'écrit : } P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

$$\text{avec } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \text{ (Polynômes de Lagrange)}$$

Démonstration. Il faut montrer l'existence et l'unicité. L'existence est claire à travers l'égalité

$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$ en vérifiant $P_n(x_i) = f(x_i)$. Pour l'unicité, soient P_1 et P_2 deux polynômes distincts de degré au plus n , passant par les mêmes points continus. Alors le polynôme non nul, $P_1 - P_2$ de degré au plus n , possède $n+1$ racines x_i avec $i \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}$, ce qui est absurde. \square

1.6 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de visiter des concepts liés à la modélisation d'un contour discret, notamment nous avons défini des objets discrets comme des hyperplans et des hypersphères analytiques.

Une analyse des méthodes de reconnaissance de formes précisément de la transformée de Hough a également été faite dégageant des limites de certaines méthodes.

Une brève introduction de la méthode d'interpolation polynômiale de Lagrange a été effectuée pour obtenir une reconstruction des points discrets.

En perspective, d'autres modèles de représentation d'un contour comme les graphes peuvent être étudiés.

Chapitre 2

Discrétisation et extension du dual d'un pixel

Sommaire

2.1	Introduction	71
2.2	Problème avec la discrétisation analytique	72
2.3	Courbes discrètes bruitées	74
2.3.1	Hyperplans analytique bruités et hypersphères analytique bruitées	82
2.3.2	Pavés bruités pour la redéfinition des primitives discrètes par subdivision	84
2.4	Epaisseur des hyperplans analytiques et dual d'un pixel	87
2.5	Extension du dual d'un pixel	88
2.5.1	Duals de quelques formes géométriques	88
2.5.2	Préimage des formes géométriques	98
2.5.3	Propriétés de la préimage généralisée	99
2.6	Intersection des hyperplans analytiques	102
2.6.1	Concepts	102
2.6.2	Description de la méthode	103
2.6.3	Algorithme de reconnaissance	111
2.7	Conclusion	112

2.1 Introduction

Ce chapitre analyse les courbes analytiques discrètes en proposant une définition des courbes discrètes bruitées. Il propose également une extension du dual d'un pixel[1], en déterminant le dual

d'autres formes géométriques, permettant d'introduire d'autres formes de droites discrètes, pouvant avoir des applications en tracée de rayon.

La section 2.2 met en lumière l'impact de l'épaisseur sur la définition de la courbe analytique discrète. La section 2.3 définit notre conception d'une courbe analytique discrète bruitée. Une analyse de l'impact de l'épaisseur des contours sur le dual d'un pixel est réalisée dans la section 2.4. Dans la section 2.5, nous présentons le dual de quelques formes géométriques comme le rectangle, le cercle et des propriétés de la préimage. Le dual d'un pixel[1] est utilisé dans la section 2.6 pour proposer une composition de transformées qui est une alternative pour étudier la reconnaissance des intersections de droites analytiques, pouvant s'étendre à d'autres formes d'intersection.

2.2 Problème avec la discrétisation analytique

La discrétisation analytique des courbes et surfaces peut être également définie par :

Définition 44. (Discrétisation analytique) On appelle discrétisation orientée par un vecteur $\overleftarrow{v} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2} = 1$ et d'épaisseur $\omega > 0$ d'une courbe $C \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble des points de Z^n compris entre les courbes C_1 et C_2 tels que $C_1 = T_{\frac{\omega}{2}\overleftarrow{v}}(C)$ et $C_2 = T_{-\frac{\omega}{2}\overleftarrow{v}}(C)$

Des exemples basés sur cette définition des courbes polynomiales analytiques sont illustrés par la figure 2.1 avec $\overleftarrow{v} = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ et $\omega = 4$.

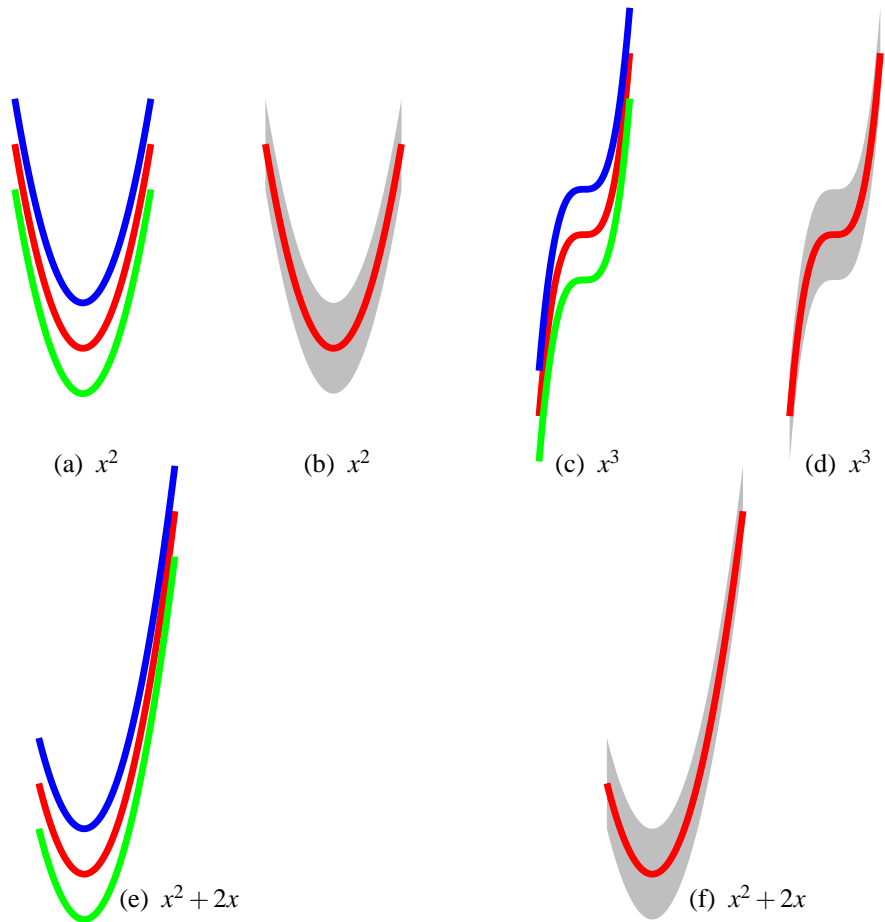


FIGURE 2.1 – Courbe polynomiale

Certains vecteurs de translation entraînent des déformations dans la discrétisation du contour continu.

Le modèle d'une hypersphère analytique est caractérisé par son épaisseur ω qui pour des valeurs élevées dénature le modèle. En effet, un cercle analytique discret peut coïncider avec un disque, illustré par la figure 2.2.

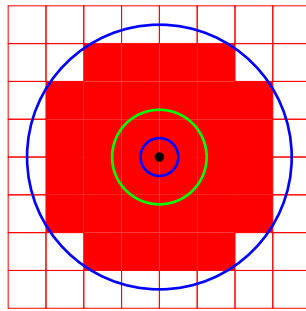


FIGURE 2.2 – Épaisseur augmentée d'un cercle analytique

Cela signifie que les méthodes de reconnaissance de cercles analytiques doivent prendre en compte ce paramètre d'épaisseur. La méthode de la médiatrice généralisée proposée au chapitre 3 s'intéresse au cercle analytique supercouverture, naïf.

2.3 Courbes discrètes bruitées

Une image bruitée est une image où certains pavés ont une intensité résultante du fait de la mauvaise prise de la scène ou des capteurs. Ces pavés peuvent appartenir aux contours discrets. La recherche d'une forme particulière sur un tel contour discret doit prendre en compte ces caractéristiques.

Il existe des modèles de bruit implanté dans les logiciels de traitement d'image tels que le bruit poivre et sel, le bruit gaussien, le bruit uniforme et le bruit périodique. En traitement d'image, il existe également des filtres de débruitage pour obtenir une image nette.

Nous proposons notre conception d'une image bruitée en modifiant l'intensité de certains points discrets. L'algorithme 2.1 est une méthode de création d'une image bruitée.

Algorithme 2.1 Création d'une image bruitée

DONNÉES :

- Soit S un ensemble de m pavés $P_1, P_2, \dots, P_{m-1}, P_m$ constituant l'espace image en dimension n
- Soit N le nombre de pavés bruités que l'on désire injecter dans l'image pour avoir une image bruitée.

DÉBUT

copier S dans S'

$i=1$

Tant $i \leq N$ faire

choisir de façon aléatoire un pavé p dans S' et changer son intensité par une valeur exceptionnelle

retirer p dans S'

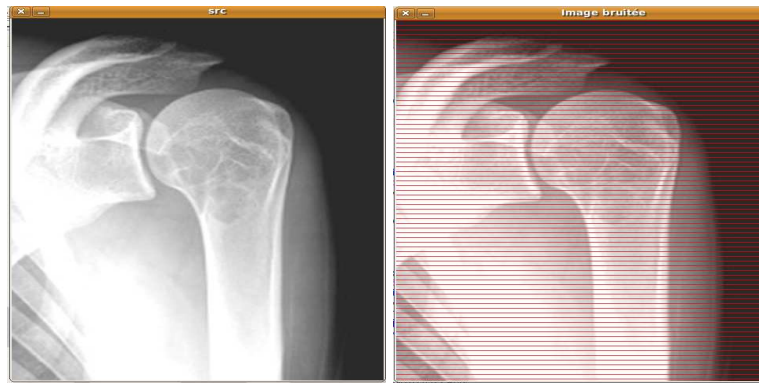
Marquer p dans S comme étant un pavé bruité

incrémenter i

Fin Tant que

FIN

La figure 2.3 montre une image originale en 2.3a où certains pixels ont été modifiés pour obtenir une image bruitée en 2.3b, avec la librairie OpenCV en 2.3c.



(a)

(b)

```

1 #include <cv.h>
2 #include <highgui.h>
3 #include <iostream>
4 #include <stdio.h>
5 using namespace std;
6 int main(int argc, char** argv)
7 {CvScalar s;
8 IplImage* newImgd;
9 IplImage* newImg; // original image
10 newImg = cvLoadImage("debutfemur.png",1);
11 newImgd=cvCloneImage(newImg);
12 int fin = newImg->width*newImg->height;
13 s.val[0]=0;
14         s.val[1]=0;
15         s.val[2]=255;
16 /* tracé d'une droite diagonale */
17 for(int i=0; i<newImg->width; i++)
18 for(int j=0; j<newImg->height; j++){
19 if ((j%8)==0)
20 cvSet2D(newImg,j,i,s);
21 };
22 cout<<"Ligne"<<(newImg->width)<<endl;
23 cout<<"Ligne"<<(newImg->height)<<endl;
24 cvNamedWindow( "Image bruitée", CV_WINDOW_AUTOSIZE );
25 cvShowImage( "Image bruitée", newImg);
26 cvNamedWindow( "Copie", CV_WINDOW_AUTOSIZE );
27 cvShowImage( "Copie", newImgd);
28 cvWaitKey(0);
29 cvReleaseImage( &newImg );
30 cvReleaseImage( &newImgd );
31 cvDestroyWindow( "Image bruitée");
32 cvDestroyWindow( "Copie");
33 exit(0);
34 }

```

(c)

FIGURE 2.3 – *Image bruitée*

La notion d'un contour discret flou est important, car nous avons besoin de traiter des données de ces contours, pour identifier des formes géométriques. Un objet flou est un objet où des points discrets ne sont pas à leur position réelle ; les points discrets pouvant se déplacer avec un certain écart de leur position de départ. Quelques travaux sur les éléments de la géométrie discrète floue[122], ont été réalisés par Isabelle Debled-Rennesson[113] notamment la définition d'un segment analytique discret flou, et des méthodes de reconnaissance de segments discrets flous ont été établies[109, 113].

La géométrie discrète floue[122] utilise les concepts de la géométrie discrète, de la géométrie euclidienne et de la théorie du flou, représentés par la figure 2.4. La géométrie discrète floue comprend la définition des primitives discrètes floues qui sont des modèles nécessaires permettant d'aboutir à des méthodes de reconnaissance.

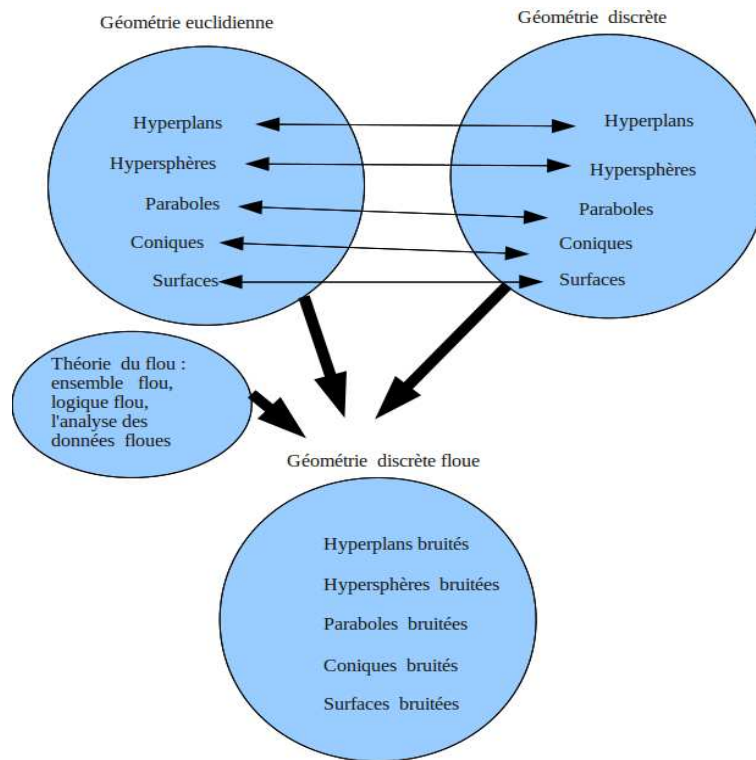


FIGURE 2.4 – Géométrie discrète floue

La notion de flou est utilisée dans plusieurs domaines particulièrement en classification des données[109, 110]. Elle se divise en plusieurs groupes tels que l'ensemble flou, la logique floue, l'analyse des données floues. Ce qui nous intéresse dans cette section, est l'ensemble flou et l'analyse des données floues car ils permettent de définir une droite analytique floue et un arc analytique flou qui sont nécessaires dans le cadre de la reconnaissance de formes dans une image bruitée.

Un objet discret flou est un objet dont la représentation discrète n'est pas certaine. Leur reconnaissance nécessite des méthodes, prenant en compte cette incertitude qui peut être due à une absence de points discrets ou de pavés, à la taille des pavés. Une résolution moins élevée augmente l'incertitude sur la forme continue à détecter. Une technique pour rendre imprécise la forme continue associée à une image discrète est d'augmenter la taille des pavés.

Plusieurs analyses peuvent se faire pour cerner le concept de contours discrets bruités. Nous avons vu qu'un contour discret peut contenir une droite discrète, un cercle discret et plus généralement en dimension supérieure, un hyperplan discret ou une hypersphère discrète. Un contour discret est une représentation bruitée de ces formes discrètes.

Une droite discrète analytique bruitée est une droite discrète analytique où certains pavés sont absents. Il en est de même pour un cercle analytique bruité et plus généralement pour les hyperplans et les hypersphères analytiques. Les hyperplans analytiques bruités (respectivement hypersphères analytiques bruitées) sont alors des sous-ensembles des hyperplans analytiques (respectivement hypersphères analytiques) : les hyperplans analytiques bruités (respectivement hypersphères analytiques bruitées) sont obtenus des hyperplans analytiques (respectivement hypersphères analytiques) en définissant des contraintes de sélection de points discrets. L'absence de points discrets signifie que certains points discrets ne portent pas les mêmes caractéristiques communes que les autres pour avoir une uniformité notamment la même intensité. Lorsque le nombre de pavés bruités dépassent les pavés représentant l'objet discret réel, il s'en suit que l'objet réel n'est pas bien représenté. Il en est de même de la forme recherchée dans cette image. Cela signifie qu'il faut considérer que le nombre de pavés réels de l'objet soit supérieur aux pavés bruités pour toujours conserver l'essentiel de la forme recherchée.

De plus, une image est bornée. Cela signifie que tous les objets discrets de l'image sont des ensembles finis de pavés. La reconnaissance de droites discrètes se transpose alors à la reconnaissance de segments de droites discrètes. Les méthodes de reconnaissance d'hyperplans naïfs, standard ou supercouverture[1] avec la notion de la préimage généralisée sont des méthodes de reconnaissance de segments naïfs, standard ou supercouverture flous. Une autre interprétation est de voir un hyperplan naïf comme un hyperplan standard ayant des pavés absents : un segment naïf est un segment flou[113] inclus dans un hyperplan standard.

En outre, le concept d'objet discret flou peut être rattaché à la discrétisation d'une courbe discontinue de \mathbb{R}^2 , par analogie à la notion de la discrétisation d'une courbe continue pour obtenir des courbes discrètes. La discontinuité d'une courbe de \mathbb{R}^2 se déduit de la définition de la continuité d'une courbe[130]. Par exemple, une courbe discontinue de \mathbb{R}^2 , peut avoir des points continus absents. Sa discrétisation peut conduire aussi à des pixels absents. Cela peut se voir aussi en dimension 3 avec la notion de surface discontinue. Une courbe continue d'un point de départ A, à un point d'arrivée B peut aussi être incluse dans n'importe quelle courbe continue. Il suffit de prolonger la courbe par le

point A ou par le point B à d'autres points par continuité. Si les parties prolongées sont indéterminées, la courbe continue initiale est considérée comme une courbe discontinue.

La figure 2.5 met en évidence une courbe discontinue et sa discrétisation. En 2.5a, nous avons une courbe continue et sa discrétisation en 2.5b.

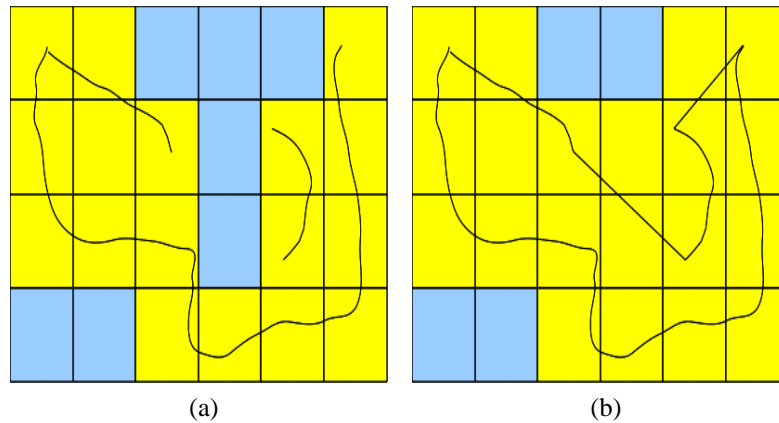


FIGURE 2.5 – Courbe continue et courbe discontinue

Les hyperplans analytiques bruités et des hypersphères analytiques bruitées peuvent être définis à partir des définitions analytiques des hyperplans analytiques et des hypersphères analytiques. Un ensemble de points discrets (x, y) d'une droite analytique, vérifiant $x \in [i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}]$ avec $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ ou $y \in [k - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}]$ avec $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ détermine une partie de cette droite analytique.

La figure 2.6 montre une droite analytique bruitée avec des zones colorées en bleu, pour indiquer des pixels absents. Ces pixels n'appartiennent pas à la droite analytique.

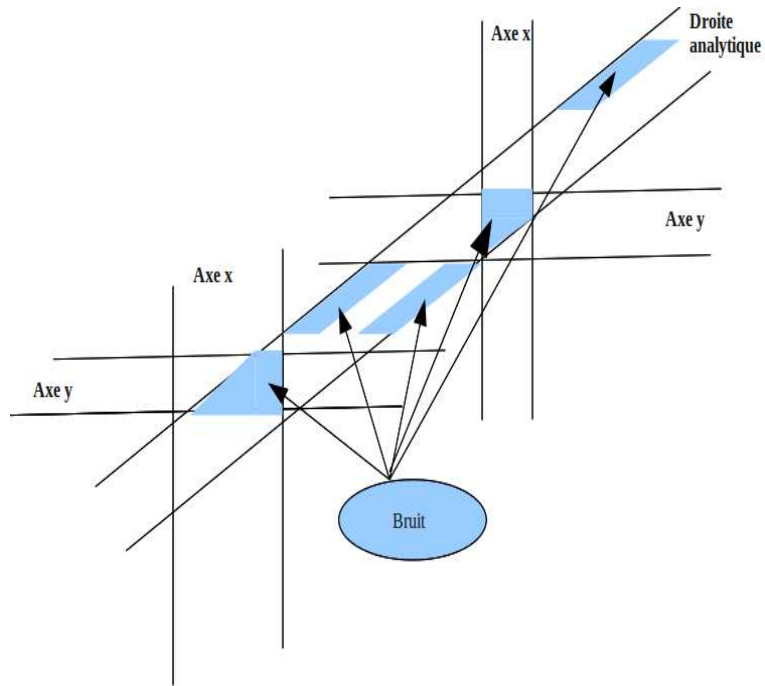


FIGURE 2.6 – Zone contenant des pavés absents

Dans une grille carrée, une grille isothétique et leurs extensions en dimension 3 et supérieure, les côtés des pavés sont parallèles aux axes du repère, les zones contenant les pavés absents sont représentés par leurs coordonnées en dimension n par $[a_1 - \frac{1}{2}, a_1 + l_{a_1} + \frac{1}{2}] \times \dots \times [a_{n-1} - \frac{1}{2}, a_{n-1} + l_{a_{n-1}} + \frac{1}{2}] \times [a_n - \frac{1}{2}, a_n + l_{a_n} + \frac{1}{2}]$ où $(a_i, l_{a_i}) \in \mathbb{Z}^2$. Il suffit de faire leur union pour avoir la zone contenant les pavés absents comme le montre la figure 2.7 en dimension 2.

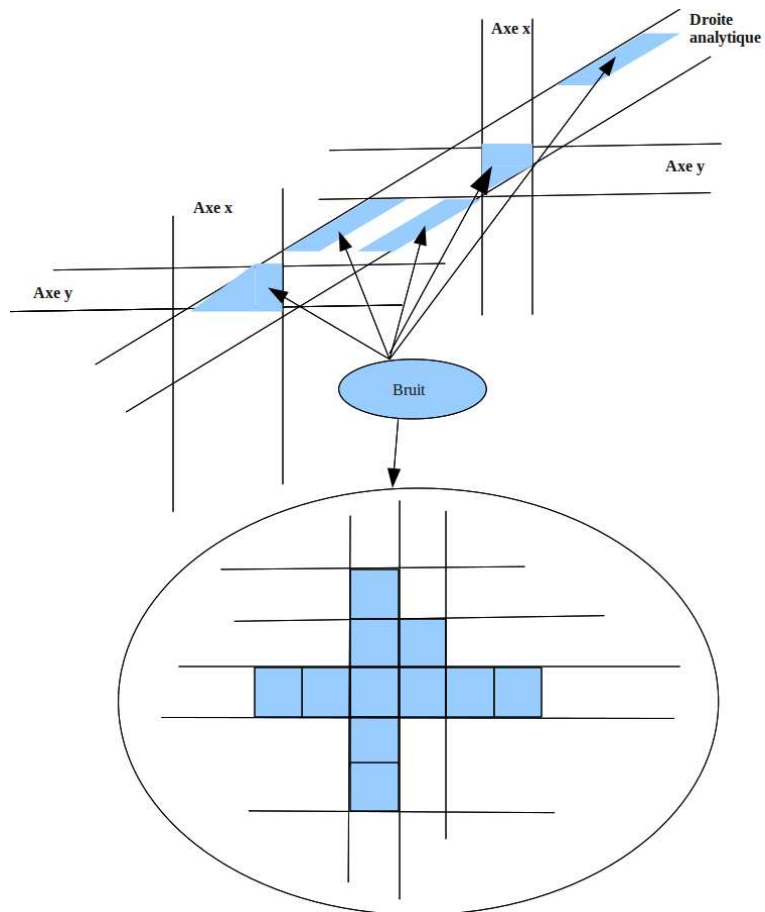


FIGURE 2.7 – Composants de la zone contenant des pavés absents

La figure 2.8 montre une droite analytique épaisse bruitée en rouge en 2.8a dans une image et son code en 2.8b, écrit avec la librairie OpenCV.

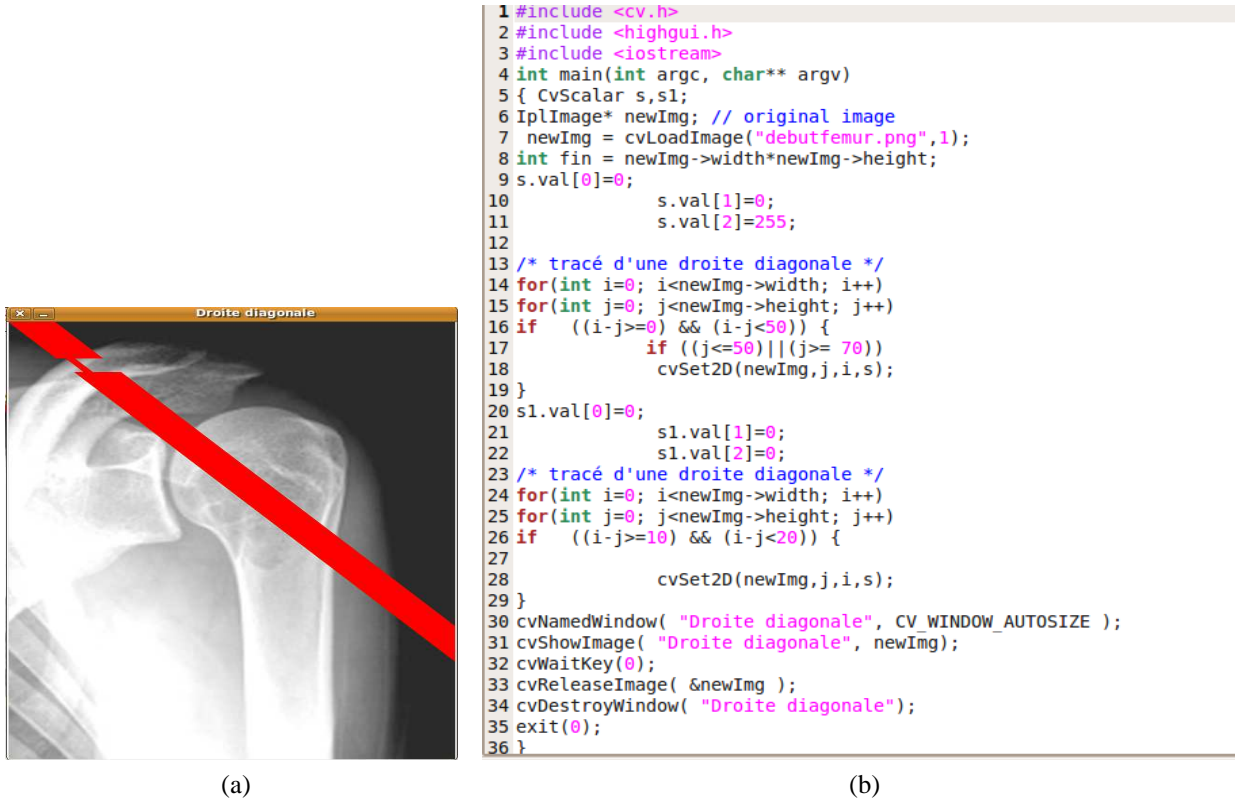


FIGURE 2.8 – Droite analytique épaisse bruitée

Une zone de pavés absents est construite par extension. Soit $Z = \{z_v \text{ avec } v \in \{1, 2, \dots, m-1, m\}\}$ un ensemble de m zones disjointes de pavés absents qui peuvent être réparties dans un objet discret O , le rendant flou. Chaque zone z_v est considérée u -connexe (u variant) : $z_v = [a_1(v) - \frac{1}{2}, a_1(v) + l_{a_1}(v) + \frac{1}{2}] \times \dots \times [a_{n-1}(v) - \frac{1}{2}, a_{n-1}(v) + l_{a_{n-1}}(v) + \frac{1}{2}] \times [a_n(v) - \frac{1}{2}, a_n(v) + l_{a_n}(v) + \frac{1}{2}]$ où $(a_i(v), l_{a_i}(v)) \in \mathbb{Z}^2$.

Si l'on pose $A(x)$ une fonction qui détermine l'aire d'un objet discret. L'objet discret O bruité est dit "bien représenté" si l'aire formée par les pavés absents est inférieure à l'aire formée par les pavés présents, c'est-à-dire si $\frac{A(O) - A(Z)}{A(Z)} \geq 1$. Nous obtenons alors $(A(O) - A(Z)) + (A(O) - A(Z)) \geq (A(O) - A(Z)) + A(Z)$ d'où $\frac{A(O) - A(Z)}{A(O)} \geq \frac{1}{2}$.

2.3.1 Hyperplans analytique bruités et hypersphères analytique bruitées

Un hyperplan analytique bruité est défini par :

Définition 45. (Hyperplan analytique bruité) En dimension n , soit $Z = \{z_v \text{ avec } v \in \{1, 2, \dots, m-1, m\}\}$ un ensemble de m zones z_v disjointes de pavés telles que chaque z_v soit u -connexe ($u \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}$), z_v

$= [a_1(v) - \frac{1}{2}, a_1 + l_{a_1}(v) + \frac{1}{2}] \times \dots \times [a_{n-1}(v) - \frac{1}{2}, a_{n-1}(v) + l_{a_{n-1}}(v) + \frac{1}{2}] \times [a_n(v) - \frac{1}{2}, a_n(v) + l_{a_n}(v) + \frac{1}{2}]$
avec $(a_i(v), l_{a_i}(v)) \in \mathbb{Z}^2$.

L'hyperplan analytique bruité H de paramètres $A(A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des points $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant :

$$\mu \leq \sum_{i=1}^n (A_i x_i) < \mu + \omega \text{ et } X \notin Z \text{ où } Z \subset H \text{ (} Z \text{ est l'ensemble de pavés absents)}.$$

Cette définition 45 peut s'étendre aux autres hyperplans analytiques (naïf, standard, supercouverture). La définition de la droite analytique bruitée se déduit alors en posant $n=2$. La figure 2.9 présente une droite standard bruitée, avec des pixels absents, représentés en jaune.

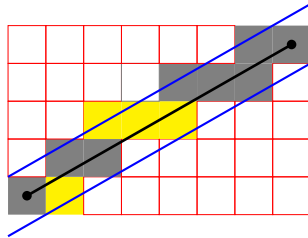


FIGURE 2.9 – Droite standard bruitée : $-\frac{|4|+|7|}{2} \leq 4x - 7y + 13.5 < \frac{|4|+|7|}{2}$

Cette définition 45 inclut les définitions d'un segment flou de Isabelle Debled-Rennesson[113].

Nous proposons également la définition d'une hypersphère arithmétique bruitée qui étend la définition d'une hypersphère analytique bruitée.

Définition 46. (Hypersphère arithmétique bruitée) . En dimension n , soit $Z = \{z_v \text{ avec } v \in \{1, 2, \dots, m-1, m\}\}$ un ensemble de m zones z_v disjointes de pavés telles que chaque z_v soit u -connexe ($u \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}$), $z_v = [a_1(v) - \frac{1}{2}, a_1 + l_{a_1}(v) + \frac{1}{2}] \times \dots \times [a_{n-1}(v) - \frac{1}{2}, a_{n-1}(v) + l_{a_{n-1}}(v) + \frac{1}{2}] \times [a_n(v) - \frac{1}{2}, a_n(v) + l_{a_n}(v) + \frac{1}{2}]$ où $(a_i(v), l_{a_i}(v)) \in \mathbb{Z}^2$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, et $o = (o_1, o_2, \dots, o_d) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\omega_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_-$ et $\omega_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions de changement de variables. L'hypersphère arithmétique analytique bruitée $S(o, r, \omega_1, \omega_2)$ de centre o et rayon r et de fonction d'épaisseur ω_1, ω_2 , est le sous ensemble de points $X \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant :

$S(o, r, \omega_1, \omega_2) = \{X \in \mathbb{Z}^n \mid \omega_1(X) \leq \sum_{i=1}^n (x_i - o_i)^2 - r^2 < \omega_2(X)\}$ et $X \notin Z$ où $Z \subset H$ (Z est l'ensemble de pavés absents).

Un cercle analytique discret bruité représenté dans la figure 2.10 avec des pixels absents colorés en jaune.

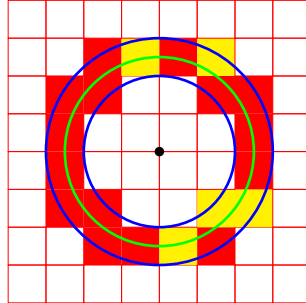


FIGURE 2.10 – Cercle analytique discret bruité $\Gamma((1,1), 2.5)$ avec $\omega=1$

2.3.2 Pavés bruités pour la redéfinition des primitives discrètes par subdivision

Nous proposons ici la définition d'un pavé flou. Cette définition sera appliquée pour établir une définition d'une hypersphère analytique floue et d'autres formes généralisées discrètes. Dans cette optique, nous utilisons le concept de diagramme de Voronoï flou introduit par Mohammadreza Jooyandeh et Ali Mohades Khorasani dans[111].

Définition 47. (Pavé flou) Soit P un pavé polytope centré en $p(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{Z}^n$. Soit $h_{(p,k)}$ une homothétie de centre p et rapport k avec $k \in]0,1[$. P' est un pavé flou de P si et seulement si $P' = h_{(p,k)}(P)$.

Les longueurs des côtés de P' sont $k.c$ avec c étant la longueur d'un côté de P (c'est une des conséquences de l'homothétie). Un pavé flou est un pavé englobé, dans un autre pavé. Par subdivision du pavé flou et du pavé englobant, nous obtenons deux groupes de pavés.

Les figures 2.11, 2.12, 2.13 montrent des exemples de pavés flous en dimension 2 et 3.

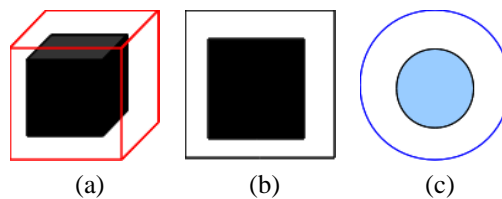


FIGURE 2.11 – Pavés flous

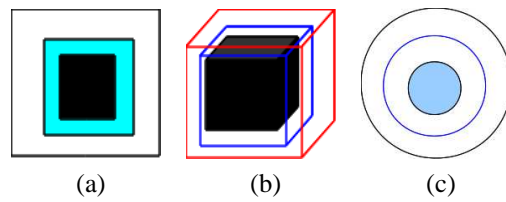


FIGURE 2.12 – Composants d'un pavé

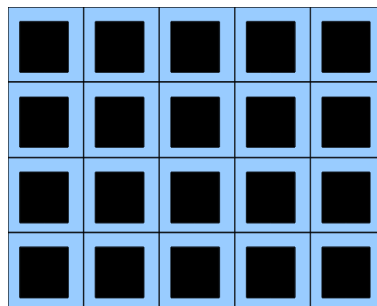


FIGURE 2.13 – Pavés flous dans une grille carrée

Cette définition permet d'établir des droites bruitées ou des hyperplans analytiques bruités par raffinement ou subdivision des pavés, pour avoir une image nette. Le pavé est subdivisé en des pavés de petite taille appartenant à plusieurs niveaux d'intensité. Nous avons une illustration de cette technique, dans la figure 2.14 où nous voyons une droite analytique classique en 2.14a, et une droite analytique bruitée en 2.14b, où les pavés ont été subdivisés, en des pavés de petite taille, regroupés en deux zones, d'intensité différente.

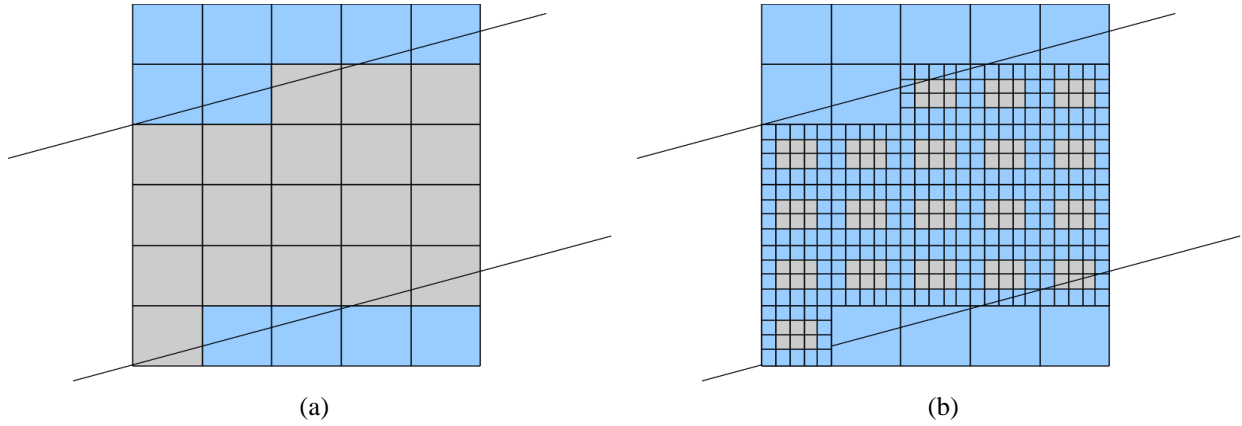


FIGURE 2.14 – Droite analytique avec des pavés subdivisés.

Cette définition 47 permet d'introduire la définition de cercle analytique bruité. Un pavé est composé d'une partie noyau et d'une partie hors noyau.

Dans le cas d'un hyperplan analytique fermé $\mu \leq \sum_{i=1}^n (A_i x_i) \leq \mu + \omega$, par subdivision des pavés suivant les n axes, nous obtenons

$$\mu \leq \sum_{i=1}^n A_i x_i K \leq \mu + \omega \iff \frac{\mu}{K} \leq \sum_{i=1}^n (A_i x_i) \leq \frac{\mu + \omega}{K}.$$

En effet pour un point $M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, $\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_{n-1} \vec{e}_{n-1} + x_n \vec{e}_n$.

Comme $\vec{e}_1 = K \vec{e}'_1$, nous avons $\overrightarrow{OM} = x_1 K \vec{e}'_1 + x_2 K \vec{e}'_2 + \dots + x_{n-1} K \vec{e}'_{n-1} + x_n K \vec{e}'_n$.

D'où $M(kx_1, kx_2, \dots, kx_{n-1}, kx_n)$ dans la nouvelle base.

De même la définition de l'hypersphère analytique $(r - \frac{\omega}{2})^2 \leq \sum_{i=1}^d (kv_i - o_i)^2 < (r + \frac{\omega}{2})^2$ devient $\frac{(r - \frac{\omega}{2})^2}{k^2} \leq \sum_{i=1}^d (v_i - o_i)^2 < \frac{(r + \frac{\omega}{2})^2}{k^2}$.

La figure 2.15 représente le point M avec $\overrightarrow{OM} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_{n-1} \vec{e}_{n-1} + x_n \vec{e}_n$ en 2.15a et $\overrightarrow{OM} = x_1 K \vec{e}'_1 + x_2 K \vec{e}'_2 + \dots + x_{n-1} K \vec{e}'_{n-1} + x_n K \vec{e}'_n$ en 2.15b.

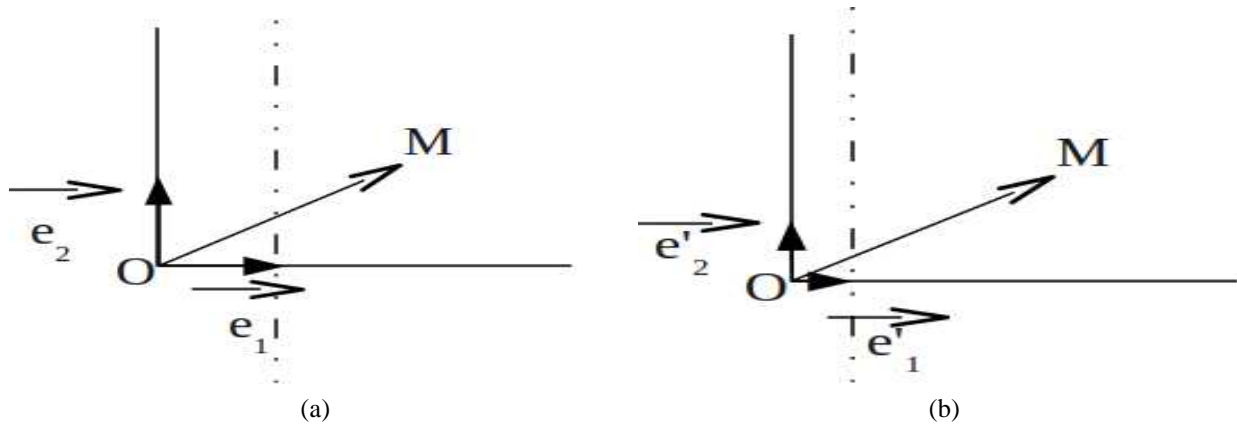
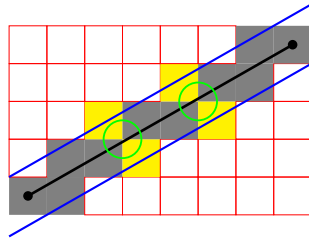


FIGURE 2.15 – Changement de repère

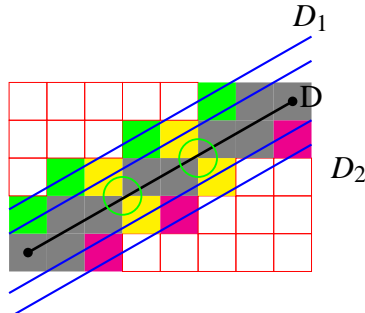
2.4 Épaisseur des hyperplans analytiques et dual d'un pixel

La définition de l'hyperplan analytique dépend de l'épaisseur. Sa valeur détermine plusieurs types d'hyperplans mince, naïf, pythagoricien, standard, épais. Avant d'appliquer les algorithmes de reconnaissance des hyperplans analytiques naïfs ou standard [1], il faut s'assurer quelle pourra être l'épaisseur du contour résultant du filtrage. Cela conduit à construire des filtres adaptés dépendant de l'épaisseur ou de comparer les filtres existants pour retenir le plus adéquat. Dans la littérature, beaucoup de filtres ont été proposés. Si un filtre offre un contour très épais, nous obtiendrons dans l'espace de paramètres avec les algorithmes de reconnaissance des hyperplans naïf et standard, des polytopes proches les uns des autres pour représenter des préimages des pavés appartenant à un hyperplan analytique épais.

La figure 2.16 montre une droite analytique épaisse contenant une autre droite analytique avec une épaisseur plus petite : en 2.16a nous avons une droite supercouverture avec $\omega=11$ et en 2.16b une droite analytique épaisse contenant la première avec $\omega=20$.



(a) supercouverture : $-\frac{|4|+|7|}{2} \leq 4x - 7y + 13.5 \leq \frac{|4|+|7|}{2}$
avec $\omega = 11$



(b) Droite épaisse : $-10 \leq 4x - 7y + 13.5 \leq 10$ avec
 $\omega = 20$

FIGURE 2.16 – Droite analytique épaisse

Soit D une droite continue traversant deux droites analytiques discrètes D_1 et D_2 , indiquées dans la figure 2.16. La droite D est le dual d'un point continu commun à la droite D_1 et à la droite D_2 . Cela montre l'impact de l'épaisseur sur la représentation de la préimage.

2.5 Extension du dual d'un pixel

Dans cette section, nous utilisons le dual défini dans la thèse de Martine Dexet[1] pour déterminer le dual de certaines formes géométriques.

2.5.1 Duals de quelques formes géométriques

Les grilles peuvent être régulières ou irrégulières. Cela implique de pouvoir déterminer dans les grilles, le dual d'un pavé dans le but d'étendre la notion de préimage à des pavés multiformes pour obtenir des algorithmes de reconnaissance d'un hyperplan analytique.

Duals d'un rectangle, d'un triangle et d'un hexagone

Lorsque les grilles sont rectangulaires, le dual d'un rectangle est fondamental pour obtenir la pré-image de rectangles qui conduit à la reconnaissance des hyperplans analytiques standard, supercouvertures.

Définition 48. (Dual d'un rectangle d'une grille irrégulière isothétique)

Soit R un rectangle de centre (r_1, r_2) et de côtés L et l suivant les axes x et y respectivement c'est-à-dire que L n'est pas toujours $\geq l$. Le dual de R est l'ensemble des points $M(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $b=y-ax$ où (x, y) vérifie le système :

$$\begin{cases} r_1 - \frac{L}{2} \leq x \leq r_1 + \frac{L}{2} \\ r_2 - \frac{l}{2} \leq y \leq r_2 + \frac{l}{2} \end{cases}$$

Cela revient à poser le système suivant :

$$\begin{cases} r_1 - \frac{L}{2} \leq x \leq r_1 + \frac{L}{2} \\ r_2 - \frac{l}{2} \leq y \leq r_2 + \frac{l}{2} \\ b = y - ax \end{cases}$$

Ce qui conduit à deux problèmes de programmation linéaire consistant à maximiser ou à minimiser :

$$\text{Problème 1 : } \begin{cases} r_1 - \frac{L}{2} \leq x \leq r_1 + \frac{L}{2} \\ r_2 - \frac{l}{2} \leq y \leq r_2 + \frac{l}{2} \\ \min[b = y - ax] \end{cases} \quad \text{et Problème 2 : } \begin{cases} r_1 - \frac{L}{2} \leq x \leq r_1 + \frac{L}{2} \\ r_2 - \frac{l}{2} \leq y \leq r_2 + \frac{l}{2} \\ \max[b = y - ax] \end{cases}$$

Si $a > 0$, nous obtenons

$$r_2 - \frac{l}{2} - a(r_1 + \frac{L}{2}) \leq y - ax \leq r_2 + \frac{l}{2} - a(r_1 - \frac{L}{2}) \quad (2.1)$$

Nous retiendrons les points $A(r_1 + \frac{L}{2}, r_2 - \frac{l}{2})$ et $C(r_1 - \frac{L}{2}, r_2 + \frac{l}{2})$ ayant respectivement pour dual, $\text{dual}(A) : y = r_2 - \frac{l}{2} - a(r_1 + \frac{L}{2})$ et $\text{dual}(C) : y = r_2 + \frac{l}{2} - a(r_1 - \frac{L}{2})$

Si $a < 0$, nous avons

$$r_2 - \frac{l}{2} - a(r_1 - \frac{L}{2}) \leq y - ax \leq r_2 + \frac{l}{2} - a(r_1 + \frac{L}{2}) \quad (2.2)$$

D'où les points $B(r_1 - \frac{l}{2}, r_2 - \frac{l}{2})$ et $D(r_1 + \frac{l}{2}, r_2 + \frac{l}{2})$ ayant respectivement pour dual, $\text{dual}(B) : y = r_2 - \frac{l}{2} - a(r_1 - \frac{l}{2})$ et $\text{dual}(D) : y = r_2 + \frac{l}{2} - a(r_1 + \frac{l}{2})$

Si $a=0$ alors $b=y$.

La figure 2.17 montre le dual d'un rectangle de sommets $(5,4)(0,4)(0,0)(5,0)$ tandis que la figure 2.18 illustre le dual d'un rectangle subdivisé en trois (03) carrés colorés.

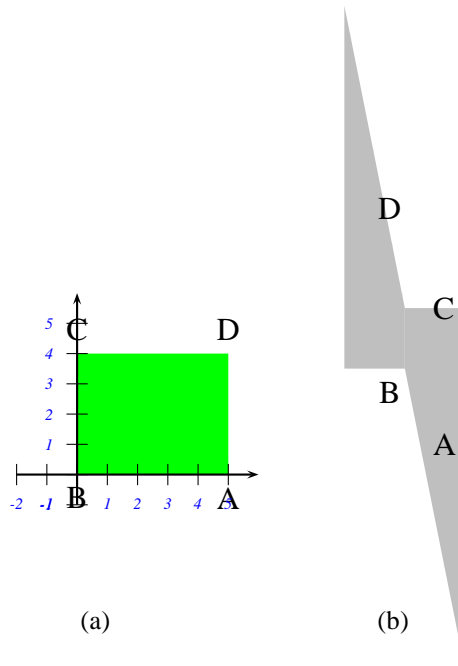


FIGURE 2.17 – Le dual du rectangle en 2.17a de sommets $(5,4)(0,4)(0,0)(5,0)$ est représenté en 2.17b

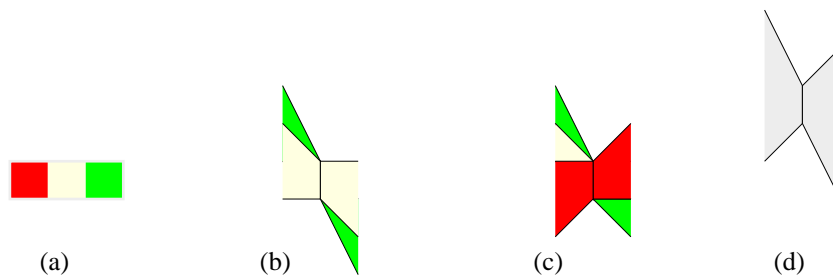


FIGURE 2.18 – Le dual d'un rectangle subdivisé en carrés

Ce dual permet de déterminer la préimage de rectangles mise en évidence par la figure 2.19.

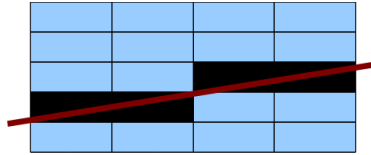


FIGURE 2.19 – Préimage de rectangles

Dans le cas général où les rectangles ne forment pas une grille isothétique, le calcul du dual d'un rectangle comporte quatre demi-plans et une équation à minimiser ou maximiser :

$$\text{Problème 1} \begin{cases} ax + by + c \leq 0 \\ dx + ey + f \leq 0 \\ gx + hy + i \leq 0 \\ jx + ky + l \leq 0 \\ \text{Min}[y_2 = y - y_1x] \end{cases} \quad \text{ou Problème 2} \begin{cases} ax + by + c \leq 0 \\ dx + ey + f \leq 0 \\ gx + hx + ky + l \leq 0 \\ jx + ky + l \leq 0 \\ \text{Max}[y_2 = y - y_1x] \end{cases}$$

Il en est de même lorsque les grilles sont constituées de pavés triangulaires et hexagonaux. Un triangle est une intersection de demi-plans. Son dual se ramène à la résolution d'un système de programmation linéaire :

$$\text{Problème 1} \begin{cases} ax + by + c \leq 0 \\ dx + ey + f \leq 0 \\ gx + hy + i \leq 0 \\ \text{Min}[y_2 = y - y_1x] \end{cases} \quad \text{ou Problème 2} \begin{cases} ax + by + c \leq 0 \\ dx + ey + f \leq 0 \\ gx + hy + i \leq 0 \\ \text{Max}[y_2 = y - y_1x] \end{cases}$$

Nous obtenons un système à 6 contraintes correspondant aux six(6) côtés d'un hexagone dans le cas du dual d'un hexagone :

$$\text{Problème 1} \left\{ \begin{array}{l} ax + by + c \leq 0 \\ dx + ey + f \leq 0 \\ gx + hy + i \leq 0 \\ jx + ky + l \leq 0 \\ mx + ny + q \leq 0 \\ rx + sy + t \\ \text{Min}[y_2 = y - y_1x] \end{array} \right. \quad \text{ou Problème 2} \left\{ \begin{array}{l} ax + by + c \leq 0 \\ dx + ey + f \leq 0 \\ gx + hy + i \leq 0 \\ jx + ky + l \leq 0 \\ mx + ny + q \leq 0 \\ rx + sy + t \\ \text{Max}[y_2 = y - y_1x] \end{array} \right.$$

Si le polytope est constitué de plusieurs côtés, son dual se ramène à un problème de programmation linéaire qui comprend plusieurs inéquations.

Dual d'un cercle et d'un disque

Le cercle analytique discret a été défini dans le chapitre 1.

Définition 49. (*Dual d'un cercle et d'une de centre (x_0, y_0) et de rayon r*) Soit C un cercle de centre $O(x_0, y_0)$ et de rayon r . Le dual de C est l'ensemble des points $M(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $b=y-ax$, avec $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ définissant l'équation du cercle C . Le dual du disque C_d associé à C est défini par l'ensemble des points $M(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $b=y-ax$, avec $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$ définissant C_d .

La proposition 50[123] sur l'intersection d'une droite et d'une hyperbole est utilisée pour établir la preuve du dual d'un cercle et d'un disque.

Proposition 50. (*Intersection d'une droite et d'une hyperbole[123]*) Soit $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ une hyperbole et une droite $D : y=mx+n$. L' intersection de D et H est donnée par :

$$\begin{cases} y = mx + n \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

- Si $a^2m^2 - b^2 = 0$ ($m=\pm\frac{b}{a}$)
- si $n=0$, il n'y a pas de solution. Par exemple, les asymptotes de l'hyperbole ;
- si $n \neq 0$, il existe une solution unique. Par exemple, une droite parallèle à une asymptote coupant l'hyperbole en un point ;

- Si $a^2m^2 - b^2 \neq 0$, on pose $\delta=4[a^4m^2n^2 - a^2(a^2m^2 - b^2)(n^2 + b^2)]$
- $\delta < 0$, la droite D n'intersecte pas l'hyperbole H ;
- $\delta = 0$, la droite D est tangente à l'hyperbole H ;
- $\delta > 0$, la droite D et l'hyperbole H ont deux points d'intersection.

La preuve de cette proposition 50 est fournie en [123].

La proposition 51 que nous proposons permet de déterminer le dual d'un cercle, et d'un disque de centre $O(0, 0)$ et de rayon R :

Proposition 51. (*Dual d'un cercle, et d'un disque de centre $O(0, 0)$ et de rayon R*) Soit $C(O(0,0), R)$ un cercle de centre O et de rayon R le dual de C est l'ensemble de droites de l'espace de paramètres, tangentes à l'hyperbole $y_2^2 - R^2y_1^2 = R^2$.

Le dual du disque est alors défini par l'ensemble des points de l'espace de paramètres vérifiant $y_2^2 - R^2y_1^2 \leq R^2$.

Démonstration. Soit $A(x_a, y_a)$ un point appartenant au cercle $C(O(0,0), R)$. Nous avons alors $x_a^2 + y_a^2 = R^2$. Le dual de A est défini par l'ensemble des points (y_1, y_2) de l'espace de paramètres vérifiant $y_2 = y_a - x_a y_1$.

Réolvons le système $y_2 = y_a - x_a y_1$ et $y_2^2 - R^2 y_1^2 = R^2$

C'est-à-dire $y_2 = y_a - x_a y_1$ et $\frac{y_2^2}{R^2} - y_1^2 - 1 = 0$

En appliquant la proposition 50, avec $X = y_2, Y = y_1, a = R, b = 1, m = \frac{-1}{x_a}, n = \frac{y_a}{x_a}$

Si $a^2m^2 - b^2 = 0$, comme $a^2m^2 - b^2 = R^2(\frac{-1}{x_a})^2 - 1$ alors $x_a = \pm R$. Comme $x_a^2 + y_a^2 = R^2$, alors $y_a = 0$ ($n=0$ également). D'où $y_2 = R y_1$ et $y_2 = -R y_1$. Avec $x_a = 0$, nous aurons $y_2 = R$ et $y_2 = -R$

Si $a^2m^2 - b^2 \neq 0, (x_a \neq \pm R)$ $\delta=4[a^4m^2n^2 - a^2(a^2m^2 - b^2)(n^2 + b^2)] \iff \delta=4R^2(\frac{y_a^2 - R^2 + x_a^2}{x_a^2})$

Pour le cercle, nous avons $y_a^2 + x_a^2 = R^2$ δ devient $\delta=0$, la droite D est tangente à H

Et pour le disque $y_a^2 + x_a^2 \leq R^2$, $\delta < 0$, la droite D ne touche pas l'hyperbole. □

La figure 2.20 illustre le dual d'un cercle et d'un disque centré en $(0, 0)$ et de rayon 2 :

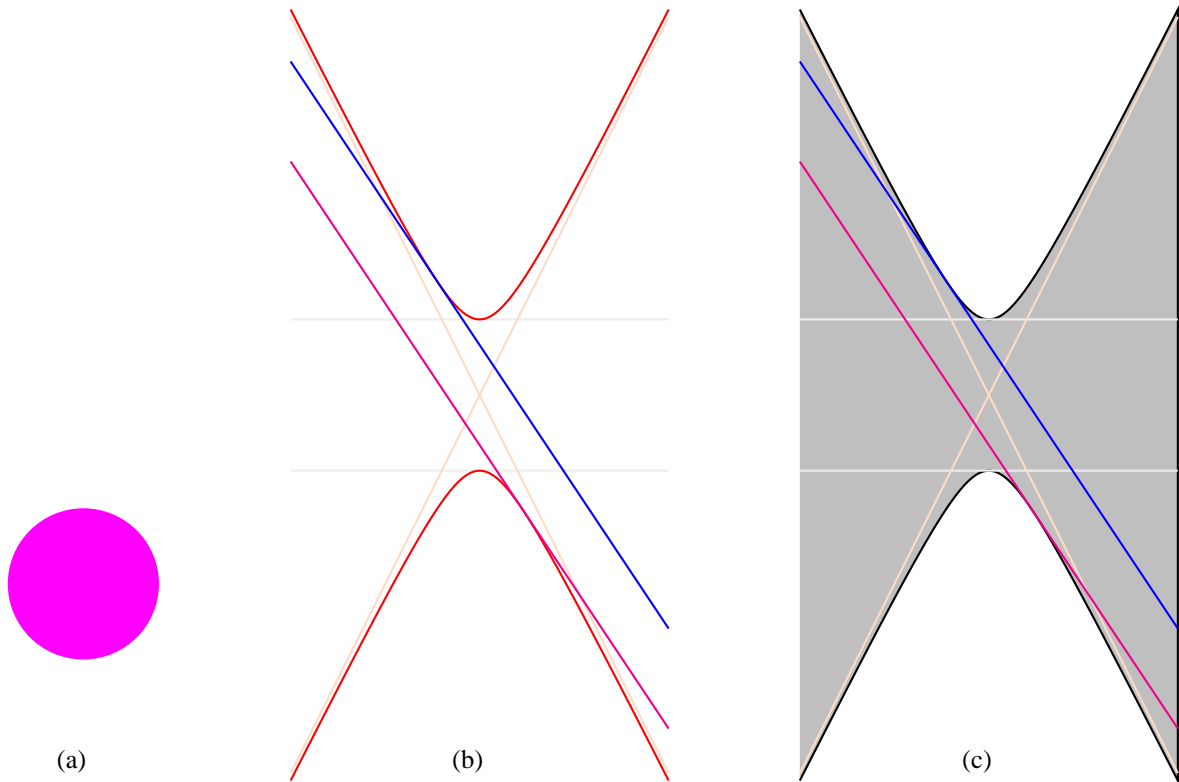


FIGURE 2.20 – Dual d'un disque

Nous généralisons ce dual à un cercle de centre $o(x_0, y_0)$ et de rayon R par la proposition 52.

Proposition 52. (Dual d'un disque de centre (x_0, y_0) et de rayon R). Soit le dual de cercle de centre (x_0, y_0) et rayon R , est caractérisé par l'hyperbole $(\frac{y_2 - g}{R})^2 - y_1^2 - 1 = 0$ avec $g = y_0 - x_0 y_1$

Démonstration. Soit $A(x_a + x_0, y_a + y_0)$ un point appartenant au cercle $C(O(x_0, y_0), R)$. Nous avons alors $x_a^2 + y_a^2 = R^2$. Le dual de A est défini par l'ensemble des points (y_1, y_2) de l'espace de paramètres vérifiant $y_2 = y_a + y_0 - (x_a + x_0)y_1$.

Réolvons le système $y_2 = y_a + y_0 - (x_a + x_0)y_1$ et $(\frac{y_2 - y_0 + x_0 y_1}{R})^2 - y_1^2 - 1 = 0$

Nous aurons par substitution en y_2 , $(\frac{y_a - x_a y_1}{R})^2 - y_1^2 - 1 = 0$. Ce qui aboutit à la proposition 51. \square

La figure 2.21 illustre cette proposition.

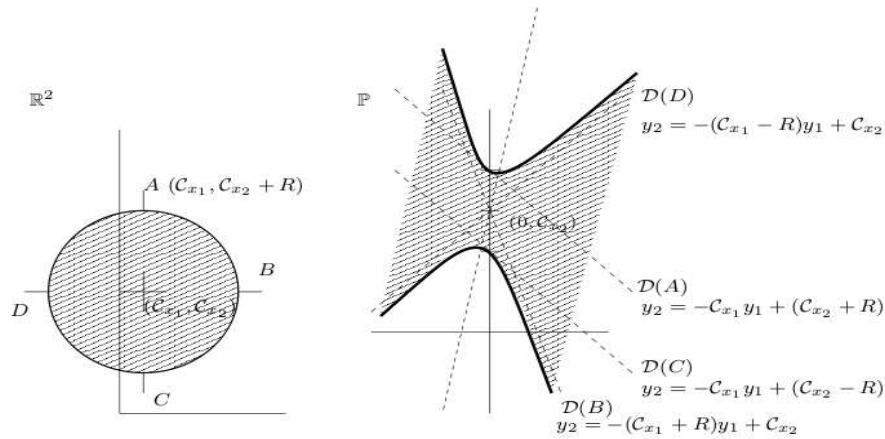


FIGURE 2.21 – Cercle continu et son dual

Dual d'un pavé concave

Dans le cas de grilles irrégulières isothétiques à pavés concaves, le dual d'un pavé peut être déterminé à partir du dual de son enveloppe convexe.

L'enveloppe convexe est définie par :

Définition 53. (*Enveloppe convexe*[113]) Soit $O \subseteq \mathbb{R}^n$ un objet discret, l'enveloppe convexe de O notée $\text{conv}(O)$ est la plus petite partie convexe de \mathbb{R}^n qui contient O . On a : $\forall (A, B) (\text{conv}(O))^2$ alors $[A, B] \subseteq \text{conv}(O)$ où $\text{Conv}(O)$ désigne la partie convexe de O .

Nous proposons la définition du dual d'un pavé concave :

Proposition 54. (*Dual de pavé concave*) Soit $O \subseteq \mathbb{R}^n$ un objet discret tel qu'il n'existe pas un hyperplan continu H avec $H \cap O = \emptyset$ divisant O en deux objets discrets distincts. Le dual de O est équivalent au dual de $\text{conv}(O)$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Soit $O \subseteq \mathbb{R}^n$ un objet discret tel qu'il n'existe pas un hyperplan continu H avec $H \cap O = \emptyset$ divisant O en deux objets discrets distincts. Soit $p \in \text{Dual}(\text{Conv}(O))$ tel que $p \notin \text{Dual}(O)$. Le dual de p est un hyperplan qui touche $\text{Conv}(O)$. L'hyperplan issu de p traverse O sans le toucher, sinon il existerait un point p' de O (touché par ce hyperplan) tel que Dual de p' passe par p et alors $p \in \text{Dual}(O)$. □

La proposition 54 permet de transformer les pavés concaves en pavés convexes dans l'objectif de déterminer leur dual. Voici un exemple d'un objet concave en 2.22a, et son enveloppe convexe en 2.22b, dans la figure 2.22

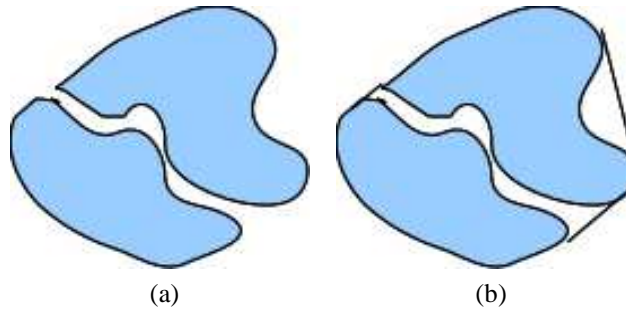


FIGURE 2.22 – *Objet concave en 2.22a et son enveloppe convexe en 2.22b*

La proposition 54 est illustrée par la figure 2.23.

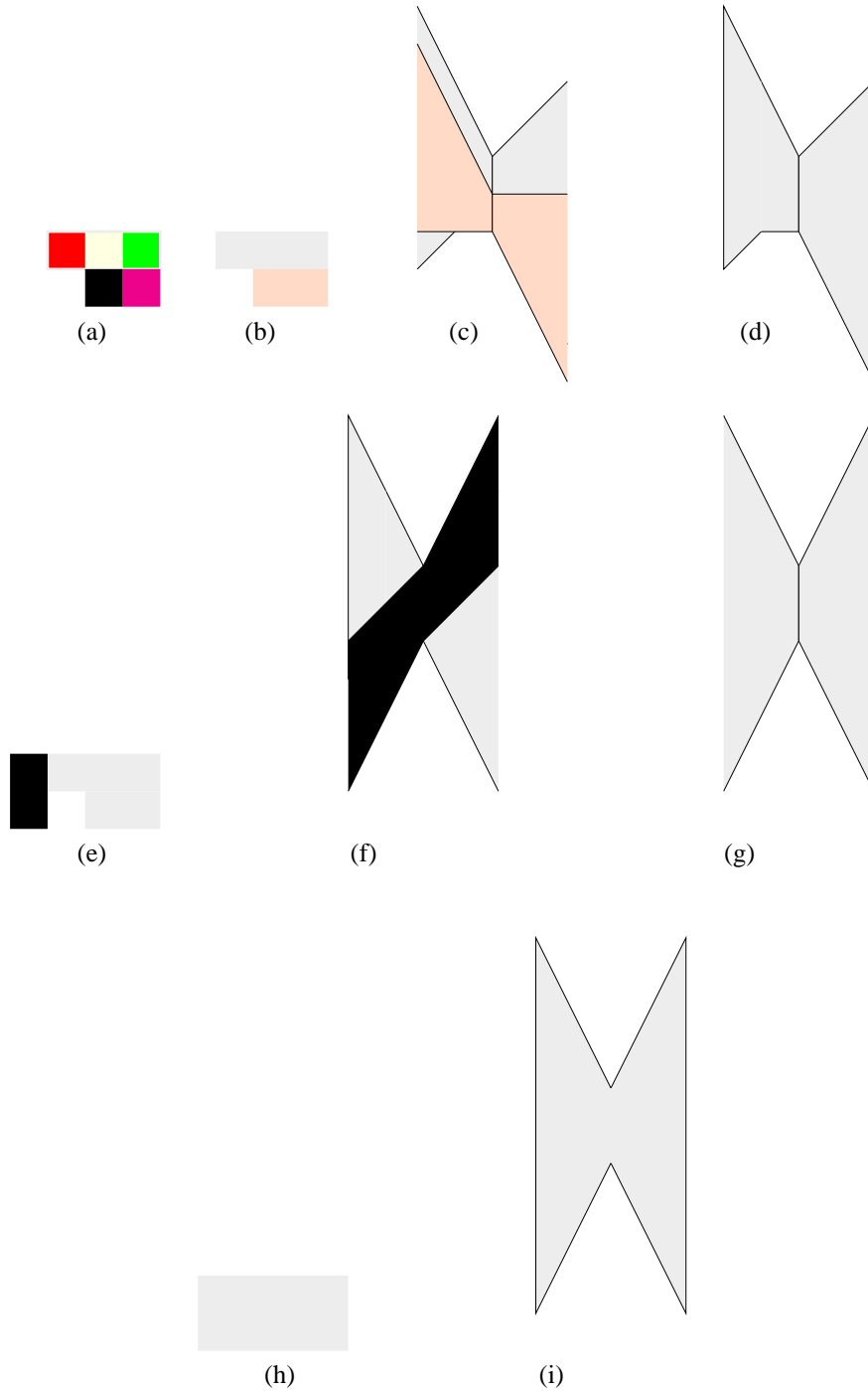


FIGURE 2.23 – Dual d'un pavé concave et de son enveloppe convexe

La figure 2.23 montre un pavé et ses composants en 2.23a et en 2.23b. Leurs duals sont déterminés en 2.23c et en 2.23d. En 2.23e, nous avons un pavé concave et son dual calculé en 2.23f et en 2.23g. En 2.23h, un pavé rectangulaire représente l'enveloppe convexe du pavé concave en 2.23e. Le dual de ce pavé rectangulaire est établi en 2.23i.

Les duals déterminés dans cette section ont des applications en tracé de rayon ou en synthèse d'image pour savoir quels sont les rayons d'une source lumineuse qui touche tels objets. La scène est

représentée en dimension 3.

La projection en dimension 2 de la scène permet de savoir si l'objet est touché par un rayon de la source lumineuse, en appliquant le dual des objets et de la source lumineuse.

2.5.2 Préimage des formes géométriques

La préimage de disques est une intersection d'un ensemble de duals de disques, par analogie à la définition de la préimage de polytopes convexes définie par Martine Dexet[1]. La préimage de disques est une intersection d'aires encadrées par des courbes hyperpoliques. Il permet d'établir un algorithme de reconnaissance de droites analytiques, basé sur le dual du disque comme le montre la figure 2.24 : en 2.24a, nous avons les duals de trois cercles C_A , C_B , C_C et leur préimage qui une intersection d'hyperpoles. En 2.24b, une droite continue traversant des cercles.

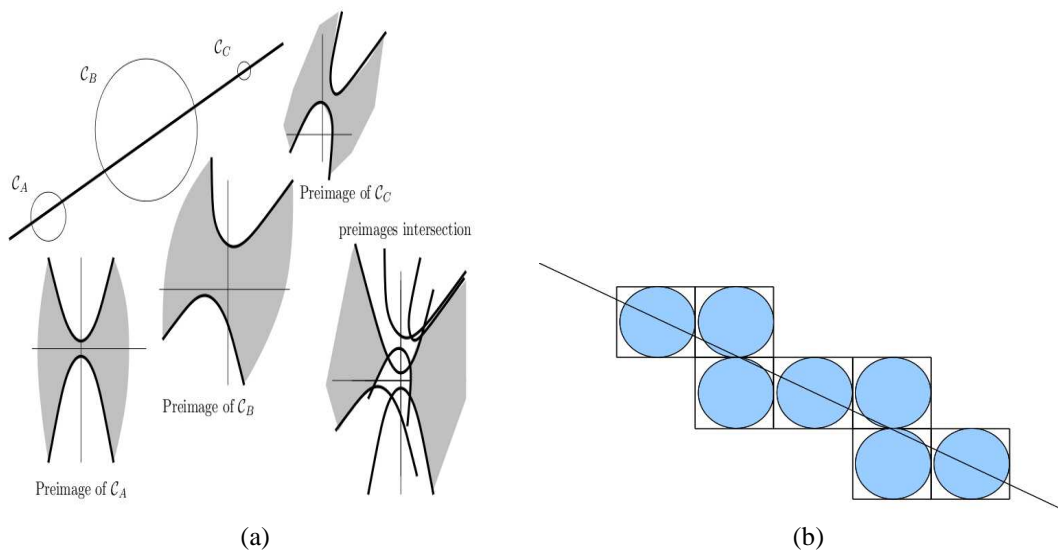


FIGURE 2.24 – Préimage de cercles

De plus, dans la figure 2.25, nous avons un ensemble de pavés concaves traversés par une droite continue.

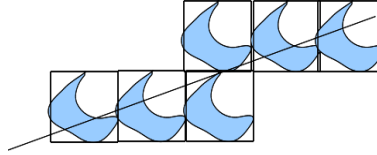


FIGURE 2.25 – Prémimage de pavés concaves

2.5.3 Propriétés de la prémimage généralisée

Cette section introduit quelques propriétés relatives à la prémimage généralisée [1].

Nous démontrons par la proposition 55 que le polygone obtenu avec la prémimage généralisée de pixels, est convexe. Cela a été initialement noté par Martine Dexet[1] sans la démonstration.

Proposition 55. (Convexité de la prémimage généralisée) Soit $D = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n\}$ un ensemble de pixels appartenant à une droite standard ou supercouverture non verticale tels que $\text{Card}(D) \geq 2$. La prémimage généralisée de D notée $\mathbb{G}(D)$ est un polygone convexe.

Démonstration. Comme $\text{Card}(D) \geq 2$, $\exists A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$ des points continus tel que $(A, B) \in \mathbb{G}(D)^2$. Les droites continues $(D1) : y = a_2 + a_1x$ et $(D2) : y = b_2 + b_1x$ touchent les pixels p_i . Alors, $\exists C_i = D1 \cap p_i$, et $C'_i = D2 \cap p_i$ avec $C_i(c_{1i}, c_{2i})$, $C'_i(c'_{1i}, c'_{2i})$ et $c_{1i} = c'_{1i}$.

$$\text{Nous avons } \begin{cases} c_{2i} = a_1 c_{1i} + a_2 \iff \lambda c_{2i} = \lambda a_1 c_{1i} + \lambda a_2 \\ c'_{2i} = b_1 c_{1i} + b_2 \iff (1 - \lambda) c'_{2i} = (1 - \lambda) b_1 c_{1i} + (1 - \lambda) b_2 \end{cases} \text{ avec } 0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\text{D'où } \lambda c_{2i} + (1 - \lambda) c'_{2i} = (\lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1) c_{1i} + \lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2$$

Comme chaque pixel est un carré, donc un objet convexe, le point $M_i(c_{1i}, \lambda c_{2i} + (1 - \lambda) c'_{2i})$ appartient au pixel p_i . Tout les points M_i appartiennent à la droite $(\delta) : Y = (\lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1) X + \lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2$. Alors (δ) traverse tous les p_i .

Donc le point $A_\lambda(\lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1, \lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2)$ appartient à $\mathbb{G}(D)$

$$\text{Finalement } \begin{cases} (A, B) \in \mathbb{G}(D)^2 \\ A_\lambda(\lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1, \lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2) \in \mathbb{G}(D)^2 \end{cases} \iff \mathbb{G}(D)^2 \text{ est un polygone convexe}$$

□

Cette propriété permet d'obtenir des points paramètres de droites euclidiennes traversant des pixels,

à partir des sommets du polygone convexe.

La figure 2.26 montre des droites continues traversant des pixels et illustre la proposition 55.

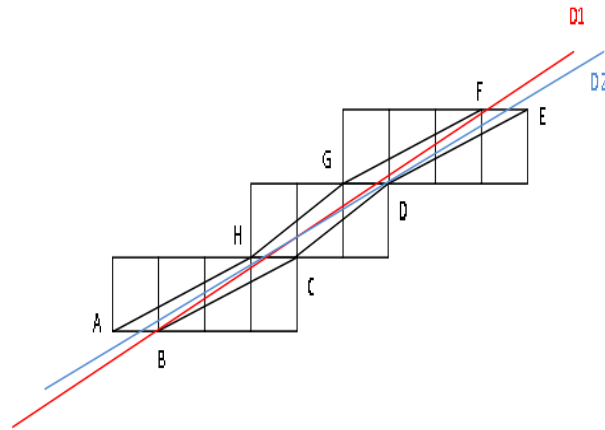


FIGURE 2.26 – Zone de passage des droites continues dans une droite standard

Cette convexité de la préimage généralisée permet de déterminer des points internes à partir des sommets de la préimage généralisée.

Proposition 56. (Inclusion de la préimage généralisée) Soit $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n\}$ un ensemble de n hypervoxels en dimension k qui appartiennent à un hyperplan naïf ou standard.

Nous avons : $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Dual}(s_i) \subset \bigcap_{1 \leq i \leq m} \text{Dual}(s_i)$, où $m \leq n$

Démonstration. Nous voyons que avec $m \leq n$

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Dual}(s_i) = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq m} \text{Dual}(s_i) \right) \cap \left(\bigcap_{m < i \leq n} \text{Dual}(s_i) \right) \quad \square$$

La figure 2.27 illustre cette proposition où nous voyons l'inclusion des deux préimages généralisées.

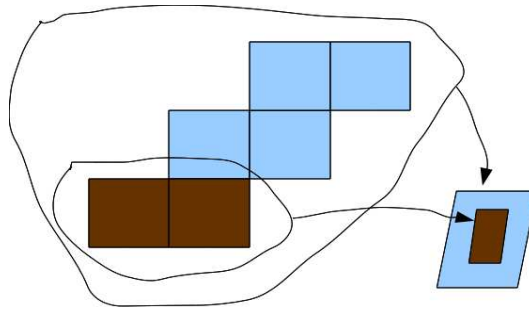


FIGURE 2.27 – Préimage imbriquée

La proposition 56 signifie que la préimage d'un hyperplan mince est incluse dans la préimage d'un hyperplan naïf. Cette dernière est une partie de la préimage d'un hyperplan analytique standard, incluse dans la préimage d'un hyperplan analytique supercouverture.

Proposition 57. (Intersection de préimages)

On pose $O = \{o_1, \dots, o_n\}$ et $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ deux ensembles d'hypervoxels de \mathbb{R}^n tels que O et P forment des hyperplans analytiques discrets distincts.

On pose $GP(O) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} Dual(o_i)$ et $GP(P) = \bigcap_{1 \leq i \leq m} Dual(p_i)$ les préimages généralisées. Soit x un pavé commun à O et P . Il existe au moins deux points continus α et β tels que $\alpha \in GP(O)$ et $\beta \in GP(P)$. $Dual(\alpha) \cap Dual(\beta) \cap x$ n'est pas vide.

Démonstration. D'après la définition de la préimage généralisée

$$GP(O) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} Dual(o_i) \text{ et } GP(P) = \bigcap_{1 \leq i \leq m} Dual(p_i), \text{ tout point } \alpha \in GP(O) \text{ (respectivement } \beta \in GP(P))$$

est un point dont les coordonnées sont des paramètres des hyperplans continus traversant les hypervoxels $O = \{o_1, \dots, o_n\}$ (respectivement $P = \{p_1, \dots, p_m\}$). Comme x est situé dans la zone d'intersection des hyperplans, nous obtenons que $x \cap (Dual(\alpha) \cap Dual(\beta))$ n'est pas vide. \square

La proposition 57 permet d'établir la reconnaissance des points d'intersections des hyperplans analytiques.

2.6 Intersection des hyperplans analytiques

L'intersection des objets discrets est un problème fondamental en géométrie. Le problème de l'intersection des droites discrètes a été traité par Nehlig[81, 80].

Nous allons déterminer l'intersection des hyperplans analytiques dans un environnement bruité, en passant par la reconnaissance des hyperplans analytiques.

2.6.1 Concepts

Partant de la méthode de l'espace dual généralisé, nous posons une base de compositions de transformations¹ pour identifier d'autres formes géométriques notamment les points communs à plusieurs droites discrètes.

D'abord, nous introduisons quelques définitions et une proposition.

Définition 58. (*Composition de transformées*) Soit $\omega : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ une fonction de changement de variables. Soit $\zeta = \{\xi_1 \dots \xi_{m+1}\}$ un ensemble de m espaces : $\xi_i \subset \mathbb{R}^{\omega(i)}$. Soit $F = \{f_i \mid \text{avec } 1 \leq i \leq m\}$ un ensemble de m fonctions ou transformées par $f_i : \xi_i \rightarrow \xi_{i+1}$ qui associe un objet X de ξ_i à un objet Y de ξ_{i+1} . Nous appelons la composition de transformées avec les ensembles ζ et F , la fonction C définie par $C = f_m \circ f_{m-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$.

Soit $\zeta = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ trois espaces avec $\xi_1 \subset \mathbb{R}^2$, $\xi_2 \subset \mathbb{R}^2$, $\xi_3 \subset \mathbb{R}^2$. Nous définissons $f_1(x_0, y_0) = \{(a, b) \in \xi_2 \mid b = y_0 - x_0 a\}$ avec $(x_0, y_0) \in \xi_1$ et $f_2(x_1, y_1) = \{(a, b) \in \xi_3 \mid b = y_1 - x_1 a\}$ avec $(x_1, y_1) \in \xi_2$. La fonction de changement de variable ω est : $\{1, 2\} \rightarrow \{2\}$ telle que $\omega(1) = 2$ et $\omega(2) = 2$.

Nous voulons attribuer un poids à chaque point de ξ_i . Ce qui signifie qu'un point de ξ_i est représenté par l'information $(\alpha_i, M(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n$, où α_i est le poids correspondant à M .

Une fonction de poids consistera à associer un entier à un point.

Définition 59. (*2-pondération*) Soit $\xi_i \subset \mathbb{R}^2$ un espace. Soit $V_i : \xi_i \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction où $V_i(P)$ est le nombre de polygone de ξ_i qui contient P . la 2-pondération de P est $V_i(P)$.

Cette définition 59 peut être généralisée à une dimension supérieure.

1. Une transformation est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B. La transformée est le résultat de la transformation, cela correspond aux éléments de l'ensemble B.

Définition 60. (*k*-pondération) Soit $\xi_i \subset \mathbb{R}^k$ un espace et soit $V_i : \xi_i \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction où $V_i(P)$ est le nombre de polytope contenant P avec $k = \dim(\xi_i)$: la valeur $V_i(P)$ est alors appelée le *k*-pondération de P .

Dans la figure 2.28, les points continus des ensembles A et B ont une 2-pondération de valeur 1. Les points $A \cap B$ ont une 2-pondération de valeur 2.

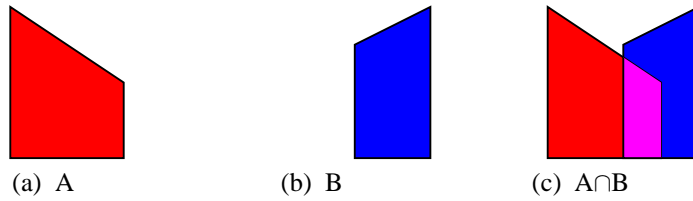


FIGURE 2.28 – Champs poids

Nous introduisons également une fonction de sélection.

Définition 61. (*Fonction de sélection*) Soit $V_i : \xi_i \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction de pondération. La fonction définie par $\delta_{i,\gamma} : \xi_i \rightarrow \xi_i$ où γ est un paramètre de seuil tels que $\delta_{i,\gamma} = \{X \in \xi_i / V_i(X) \geq \gamma\}$ est appelée fonction de sélection.

A partir de la définition de la preimage généralisée, nous introduisons la proposition suivante :

Proposition 62. Soit $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n\}$ un ensemble de n hypervoxels en dimension k qui appartiennent à un hyperplan naïf ou standard.

Nous avons : $\forall P \in GP(S) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Dual}(s_i)$, $V(P) = \text{card}(S)$, où $V(P)$ est un *k*-pondération de P .

Démonstration. Selon[2], quand $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n\}$ appartient à un hyperplan, $GP(S)$ est un polytope qui est l'intersection du dual de chaque hypervoxel. Donc $\forall P \in GP(S)$, $V(P) = \text{card}(S)$. \square

2.6.2 Description de la méthode

Dans cette section, nous nous focalisons sur l'intersection des hyperplans analytiques.

Regardons des cas où nous avons des points discrets en intersection. Cela se produit dans les cas où des hyperplans sont parallèles ou sécantes. Le parallélisme est le fait d'avoir deux hyperplans

équivalents[15] c'est à dire qu'ils diffèrent seulement par une translation, tandis que dans le cas des hyperplans sécantes, les hyperplans n'ont pas la même direction. D'après la définition d'une droite analytique discrète avec absence de 0-tunnel, leur intersection peut conduire à des points discrets. La figure 2.29 met en évidence deux droites analytiques parallèles en 2.29a et en 2.29b avec des pixels communs en gris en 2.29c. La figure 2.30 montre deux droites analytiques en 2.30a, en 2.30b et sécantes en 2.30c.

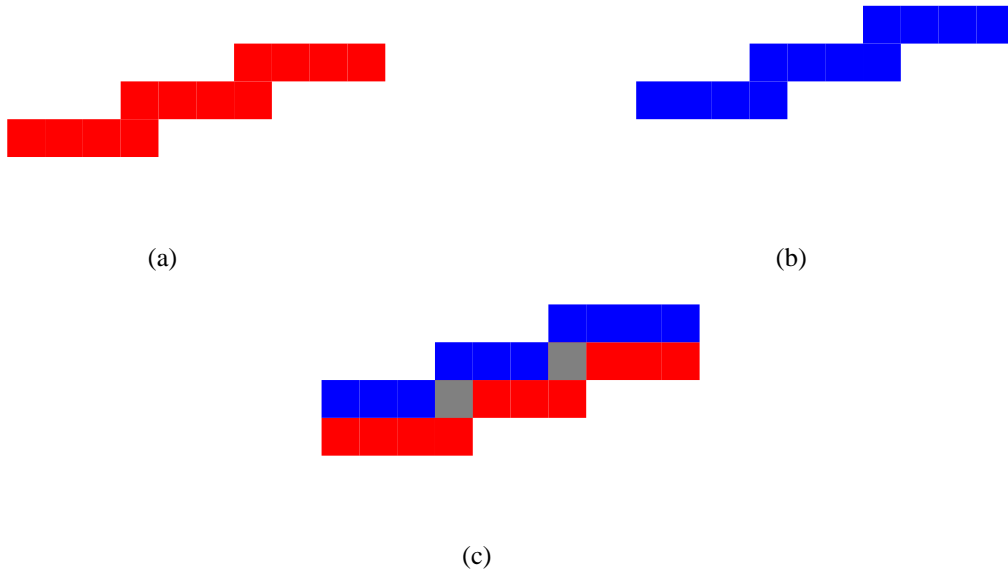


FIGURE 2.29 – Deux droites analytiques parallèles

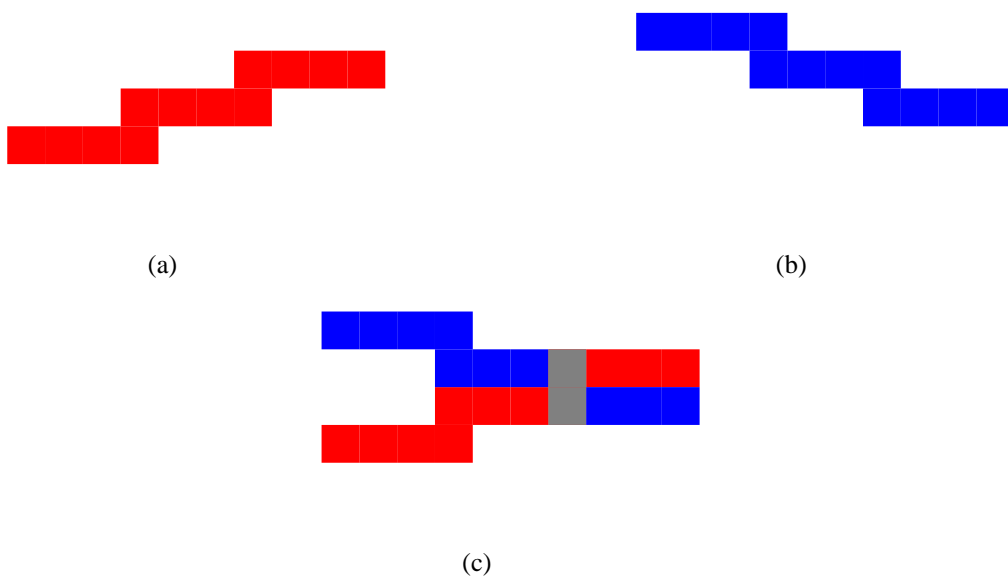


FIGURE 2.30 – Deux droites analytiques sécantes

En Géométrie euclidienne, l'hyperplan est un ensemble de points infini tandis qu'en Géométrie discrète, nous avons des segments à cause de la taille limitée de l'image. La préimage généralisée[2] contient des paramètres de l'hyperplan continu qui traverse des hypervoxels de l'espace image. Le terme approprié devrait être la reconnaissance des hyper-segments analytiques.

La figure (2.31) montre des segments de droites continues traversant des pixels. Nous voyons des segments de droites continues traversant plus de pixels que d'autres. Cela résulte de la proposition (56) concernant l'inclusion de la préimage.

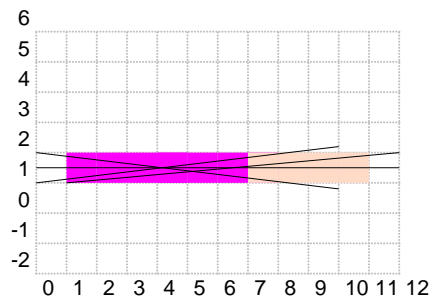


FIGURE 2.31 – Droite analytique et segment continu

Le traitement consiste d'abord à déterminer les hyperplans analytiques par l'algorithme proposé par Martine Dexet[2] concernant la reconnaissance des hyperplans naïfs et standard. Ensuite, nous traitons la préimage généralisée pour obtenir l'intersection. L'intersection des hyperplans analytiques crée un champ qui peut contenir des points discrets. Les propriétés des hyperplans analytiques ont été étudiées dans [11] et dépendent des valeurs de ω où nous obtenons des hyperplans minces, épais, naïf, standard. Nous savons alors qu'avec certaines valeurs de ω [11], nous pouvons avoir facilement une intersection vide à cause des tunnels. Il est également possible qu'avec l'influence du bruit, les points discrets communs ne soient pas bien représentés dans l'image. Pour cette raison, nous sommes intéressés aux paramètres d'intersection, les points continus dont leur discrétisation permettra d'obtenir les points discrets.

Notons qu'en géométrie euclidienne, un segment de droite appartient à une droite continue, tandis qu'en géométrie discrète un segment est un ensemble fini de points discrets qui appartiennent à plusieurs droites discrètes. Cela est montré par la figure 2.32.

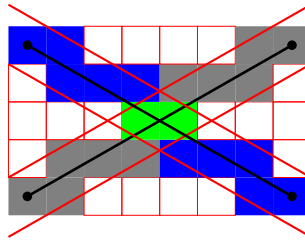


FIGURE 2.32 – Intersection de droites analytiques

Dans la figure 2.32, nous avons l'intersection de deux droites analytiques où nous voyons les pixels communs en vert. Nous observons également un polygone commun contenant ces pixels. Ce polygone est la zone d'intersection des droites continues. Quatre cas d'intersection de droites continues sont possibles dans la figure 2.33 : en 2.33a le cas où le point d'intersection se trouve dans un carré, en 2.33b le point d'intersection est sur un côté vertical de deux pixels ; en 2.33c le point d'intersection est un sommet d'un pixel et en 2.33d le point d'intersection est sur un côté horizontal de deux pixels. Nous avons également dans la figure 2.33, dans chacun des cas, la discrétisation supercouverture du point continu, illustrée.

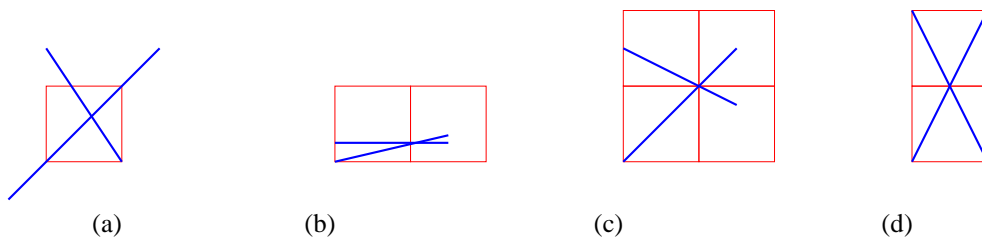


FIGURE 2.33 – Cas d'intersection de deux droites continues dans une grille carrée

Un autre cas apparaît quand une droite continue appartient à deux droites analytiques parallèles. Cela signifie que les pixels traversés par cette droite continue sont les points discrets à retenir. La figure 2.34 montre une droite continue en vert, et une autre en rouge qui appartiennent à deux droites analytiques.

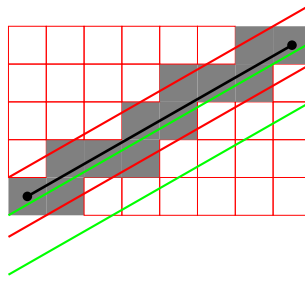


FIGURE 2.34 – *Intersection de deux droites analytiques*

Le problème d'intersection de droites continues peut se voir aussi dans le cas de grilles isothétiques pour détecter des points discrets. En grilles isothétiques, nous déterminons le dual des rectangles puis aboutir à leur intersection. La figure 2.35 met en évidence l'intersection de deux droites dans une grille irrégulière isothétique en suivant la même logique que dans le cas de grille carrée.

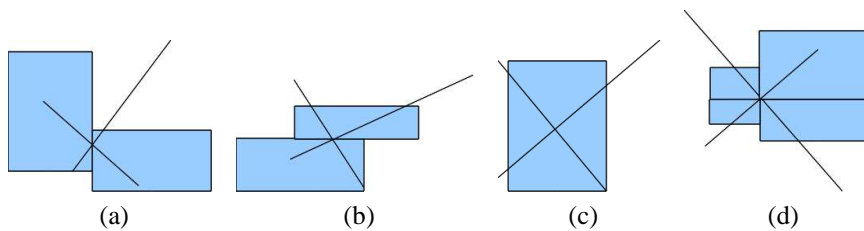


FIGURE 2.35 – *Intersection de deux droites continues dans le cas d'une grille isothétique*

En considérant une intersection de droites naïves ou standard, nous souhaitons établir une relation entre le dual d'un polygone et l'intersection de la préimage de chaque droite.

Cette analyse peut être généralisée en dimension supérieure pour les hyperplans. Si les hyperplans sont supercouvertures, leur intersection revient à faire une discrétisation supercouverture des points continus communs à l'intersection de leurs droites continues. De même, si les hyperplans sont naïfs, les points continus obtenus conduisent à des points discrets par une discrétisation naïve. Le cas d'hyperplans standard est inclu dans le cas d'hyperplans supercouvertures à travers leurs définitions respectives.

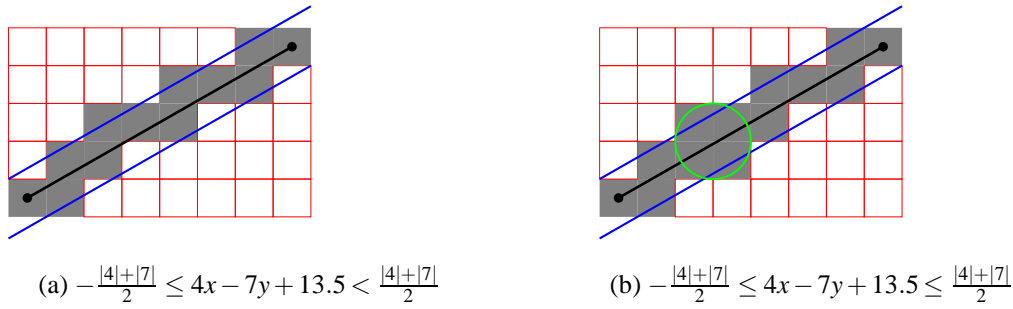


FIGURE 2.36 – Droites analytiques

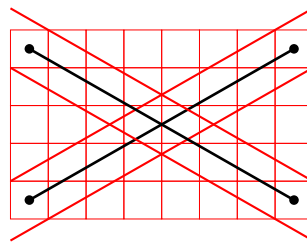


FIGURE 2.37 – Intersection de droites analytiques

Le résultat de l'intersection de deux hyperplans analytiques discrets vérifie la proposition 57.

Si l'intersection ne contient pas de points discrets, il est possible qu'un point continu appartienne à chaque hyperplan. Cela pourrait se produire facilement avec les hyperplans naïfs dont l'épaisseur est plus petite que celle d'un hyperplan standard.

Soient (Δ_1) et (Δ_2) des hyperplans naïfs ou standard en dimension n tels que (Δ_1) et (Δ_2) possèdent des points discrets communs ou non. Nous posons $(\Delta_1) = \{p_1, \dots, p_n\}$ et $(\Delta_2) = \{o_1, \dots, o_{n'}\}$. Notre objectif est la reconnaissance des points $(\Delta_1) \cap (\Delta_2)$. Nous posons le système :

$$\begin{cases} GP(\Delta_1) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (dual(p_i)) \\ GP(\Delta_2) = \bigcap_{1 \leq i \leq n'} (dual(o_i)) \end{cases} \quad (2.3)$$

Selon [2], les ensembles $GP(\Delta_1)$ et $GP(\Delta_2)$ contiennent les paramètres des hyperplans continus qui passent par respectivement par les points p_i et o_i : Le $dual(GP(\Delta_1))$ et le $dual(GP(\Delta_2))$ représentent

ces hyperplans correspondant. Finalement, avec la dualité, nous pouvons conclure que les ensembles $\text{dual}(GP(\Delta_1)) \cap \text{dual}(GP(\Delta_2))$ sont des paramètres des hyperplans qui passent par $GP(\Delta_1)$ et $GP(\Delta_2)$. cette méthode conduit à la relation :

$$(\Delta_1) \cap (\Delta_2) \simeq \text{dual}(GP(\Delta_1)) \cap \text{dual}(GP(\Delta_2)) = \text{GPP}((\Delta_1), (\Delta_2)).$$

Définition 63. (Intersection des duals des préimages généralisées) Soient $O = \{O_1, \dots, O_n\}$ et $P = \{p_1, \dots, p_m\}$ respectivement des ensembles d'objets de \mathbb{R}^n tels que O et P appartiennent respectivement à des hyperplans analytiques discrets distincts. Soit $GP(O) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{Dual}(O_i)$ et $GP(P) = \bigcap_{1 \leq i \leq m} \text{Dual}(p_i)$ respectivement la préimage généralisée de O et P . Nous appelons l'intersection des duals des préimages généralisées, l'ensemble des points définis par

$$\text{GPP}(O, P) = \text{dual}(GP(O)) \cap \text{dual}(GP(P)).$$

La préimage de la préimage généralisée (GPP) représente l'intersection des hyperplans analytiques discrets.

Plaçons nous dans le cas d'un espace 2D. Soit f_1 une fonction dual et f_2 son dual inverse. On pose $G = f_2 \circ f_1$. Dans la figure 2.38, nous voyons le dual f_1 des points continus alignés en (2.38a) et en (2.38b). Nous obtenons des points de la préimage dans l'espace de paramètres. Nous avons sélectionné seulement des points de la préimage ayant le plus fort poids, c'est à dire un nombre de votes par rapport à un seuil.

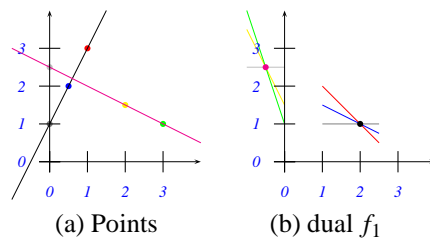


FIGURE 2.38 – Fonction f_1

Dans la figure (2.39), la fonction f_2 réalise l'inverse du dual de la préimage de polytopes trouvés dans l'espace paramètres [1, 2]. Les fonctions $f_1(x_0, y_0) = \{(a, b) \in \xi_2 \mid b = y_0 - x_0 a\}$ et $f_2(x_1, y_1) = \{(a, b) \in \xi_1 \mid b = y_1 + x_1 a\}$. Le domaine de définition de f_2 est un ensemble de points sélectionnés de la préimage.

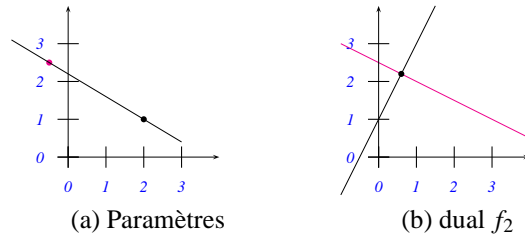


FIGURE 2.39 – Fonction f_2

La fonction $G=f_2 \circ f_1$, avec des contraintes sur ξ_2 c'est à dire sur le domaine de définition, établit une relation entre un ensemble de points de l'espace image et l'intersection résultante.

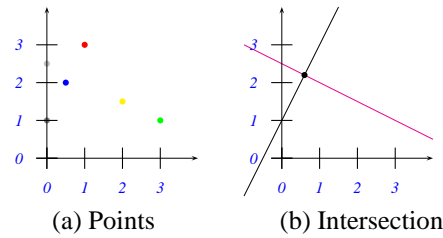


FIGURE 2.40 – Fonction composée $G=f_2 \circ f_1$

Au lieu de prendre des points continus, nous considérons des pixels. C'est le dual des polygones de l'espace de paramètres qui doit être déterminé.

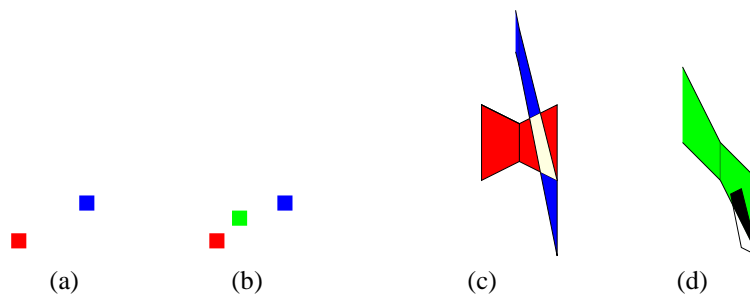


FIGURE 2.41 – Préimage de trois pixels

Nous observons dans la figure (2.41), en (2.41a) deux pixels et l'intersection de leurs duals en (2.41c). La préimage de trois pixels est représentée par le champ noir en (2.41d). Cette préimage est incluse dans la préimage des deux pixels.

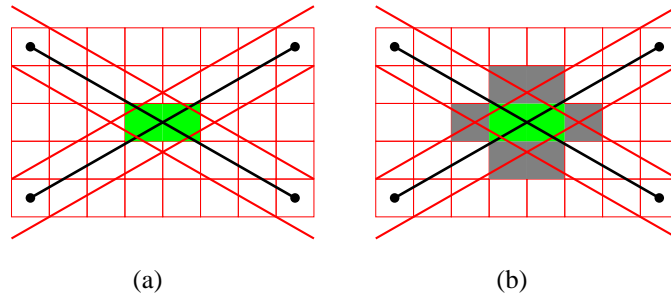


FIGURE 2.42 – Intersection des droites analytiques supercouvertures

Nous obtenons des points discrets en prenant des losanges communs à l'intersection des droites continues, mise en évidence dans la figure 2.43.

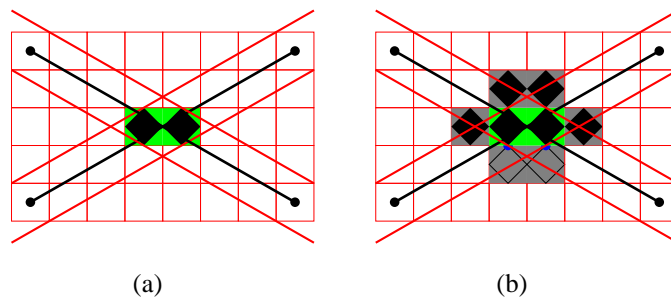


FIGURE 2.43 – Intersection de droites naïves

Soient C et C' des compositions de transformées. Soit I une image initiale déjà traitée avec des filtres. Soit $\delta_{i,\gamma}$ une fonction de sélection. La fonction finale R montrant les points d'intersection est alors $R = [C' \circ \delta_{i,\gamma} \circ C(I)]^*$ où le symbole $*$ signifie $[C' \circ \delta_{i,\gamma} \circ C(I)] \circ [C' \circ \delta_{i,\gamma} \circ C(I)] \dots \circ [C' \circ \delta_{i,\gamma} \circ C(I)] \circ [C' \circ \delta_{i,\gamma} \circ C(I)]$.

2.6.3 Algorithme de reconnaissance

Nous proposons l'algorithme 2.2 pour la reconnaissance de l'ensemble des points d'intersection.

Algorithme 2.2 Reconnaissance des intersections des hyperplans analytiques

Données :

Soient $O_{u,m_i} = \{o_{u,1}, o_{u,2}, \dots, o_{u,m_i-1}, o_{u,m_i}\}$ une famille de n ensemble d'objets sélectionnés appartenant à un hyperplan analytique dans l'espace image, avec $1 \leq u \leq n$ et $m_i \in \{m_1, \dots, m_n\}$. u est un indice pour les ensembles et m_i le nombre d'éléments de chaque ensemble.

Par exemple $O_{1,3} = \{o_{1,1}, o_{1,2}, o_{1,3}\}$ et $O_{2,4} = \{o_{2,1}, o_{2,2}, o_{2,3}, o_{2,4}\}$.

Soit $S = \{GP_1(O_{1,m_1}), \dots, GP_n(O_{n,m_n})\}$ un ensemble de n éléments sélectionnés associés à une préimage généralisée dans un espace de paramètres.

Début

PGP \leftarrow dual(GP_1)

$i \leftarrow 2$

Tant que PGP $\neq \emptyset$ and $i \leq n$ **Faire**

PGP \leftarrow PGP \cap dual(GP_i)

$i \leftarrow i+1$

FinTantque

Si PGP $\neq \emptyset$ **alors**

les O_{u,m_i} ont des points commun dans PGP.

Si non

les O_{u,m_i} n'ont pas de points communs dans PGP.

FinSI

Fin

La complexité de l'algorithme dépend de deux actions. La première consiste à obtenir l'ensemble des paramètres des polytopes. La seconde porte sur le traitement du dual des polytopes afin d'obtenir l'ensemble des intersections.

Nous allons généraliser cette procédure à la détection de nouvelles formes, où il existe des contraintes spécifiques internes construites sur la base de formes basiques : par exemple pour la reconnaissance de cercles analytiques, nous pouvons considérer la condition d'avoir des centres de cercles alignés. Ce problème se ramène à réaliser des compositions de fonctions. La résolution d'un tel problème implique une méthode de reconnaissance du cercle analytique.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'influence de l'épaisseur sur les courbes analytiques discrètes qui peut jouer sur leur identification.

Nous avons également proposé une définition large d'une courbe analytique discrète bruitée qui prend en compte la définition d'une courbe discrète bruitée d'Isabelle[113].

Les duals d'un rectangle, d'un cercle et d'un pavé concave ont été déterminés. Ces duals sont

nécessaires dans l'élaboration des algorithmes de reconnaissance de formes.

Nous avons utilisé le dual d'un pixel et la définition de la préimage généralisée pour étudier l'intersection des hyperplans analytiques.

En perspective, l'application des duals d'un rectangle, d'un cercle et d'autres formes géométriques dans le cadre de tracé de rayon peut être étudiée. Une programmation de l'intersection des droites discrètes reste à envisager, en prenant en compte la programmation de la reconnaissance des hyperplans analytiques réalisée dans le modéleur[1]. La composition des fonctions peut s'étendre à d'autres formes comme l'intersection de cercles analytiques, l'alignement des centres des cercles analytiques, ayant des applications en cartographie.

Chapitre 3

Reconnaissance de cercles analytiques discrets

Sommaire

3.1 Introduction	114
3.2 Reconnaissance de cercles analytiques bruités	115
3.2.1 Transformée de Hough étendue au cercle analytique	115
3.2.2 Définition de la médiatrice généralisée de deux régions	117
3.2.3 Propriétés de la médiatrice généralisée de deux régions	122
3.2.4 Exemples de médiatrice de deux régions	124
3.2.5 Reconnaissance du cercle analytique	127
3.2.6 Conception informatique	132
3.3 Médiatrices de pavés bruités	133
3.4 Conclusion	134

3.1 Introduction

Ce chapitre présente une méthode de reconnaissance d'hypersphères analytiques basées sur la médiatrice généralisée. Cette méthode prend en compte les grilles irrégulières et l'aspect bruité de l'image. Nous nous intéressons à la reconnaissance de l'hypersphère analytique discrète définie par Eric Andres[12, 86].

Nous allons étendre la médiatrice généralisée pour obtenir la reconnaissance du cercle analytique

discret bruité dans la section 3.2. Nous terminons ce chapitre en déterminant la médiatrice généralisée de pavés bruités qui permet d'établir une définition d'un cercle discret bruité et sa méthode de reconnaissance.

3.2 Reconnaissance de cercles analytiques bruités

Dans cette section, nous allons présenter la transformée de Hough paramétrée et montrer comment la médiatrice généralisée peut être utilisée dans la reconnaissance du cercle analytique.

3.2.1 Transformée de Hough étendue au cercle analytique

La transformée de Hough proposée dans le cadre de la reconnaissance du cercle conduit à un espace de paramètres à trois paramètres a , b et r avec l'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. A chaque point (x_i, y_i) du cercle continu, on lui associe le cercle $(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = r^2$ de paramètres a , b , r dans l'espace de paramètres.

En appliquant cette méthode aux points continus d'un pixel central contenant le centre discret comme dans la figure 3.1, nous voyons que les cercles continus touchent les pixels du cercle discret.

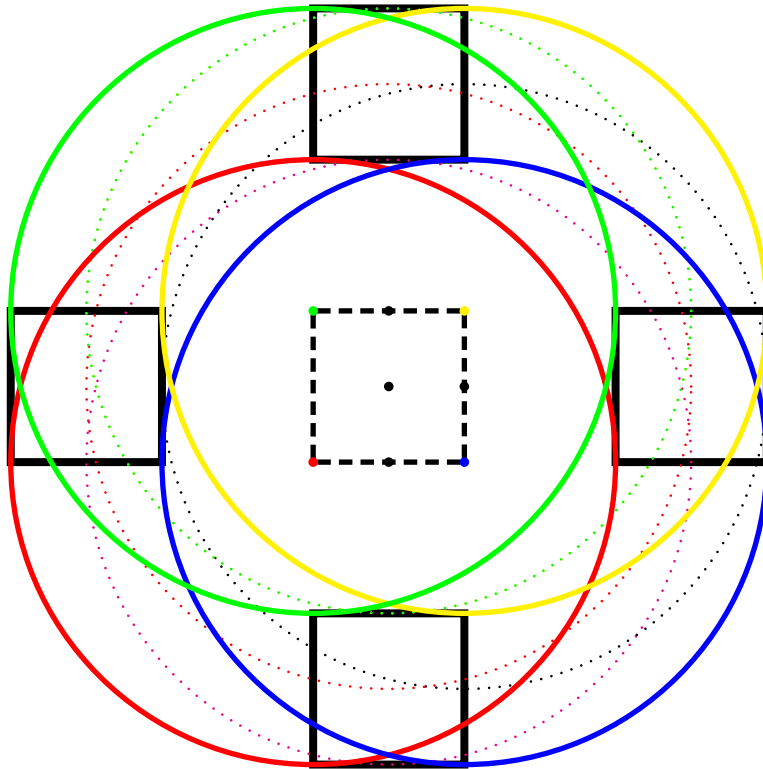


FIGURE 3.1 – Transformée de Hough étendue d'un carré

Inversement, avec des pixels du cercle discret, nous voyons dans la figure 3.2 que les cercles continus générés touchent le pixel central. Cela permet d'établir la reconnaissance d'arcs discrets analytiques ou de cercles discrets analytiques. En fixant le rayon ou en le faisant prendre des valeurs successives et en appliquant la même méthode, nous obtenons la reconnaissance du cercle analytique avec plusieurs rayons. Pour l'hypersphère, cette méthode engendre un espace de paramètres à plusieurs paramètres.

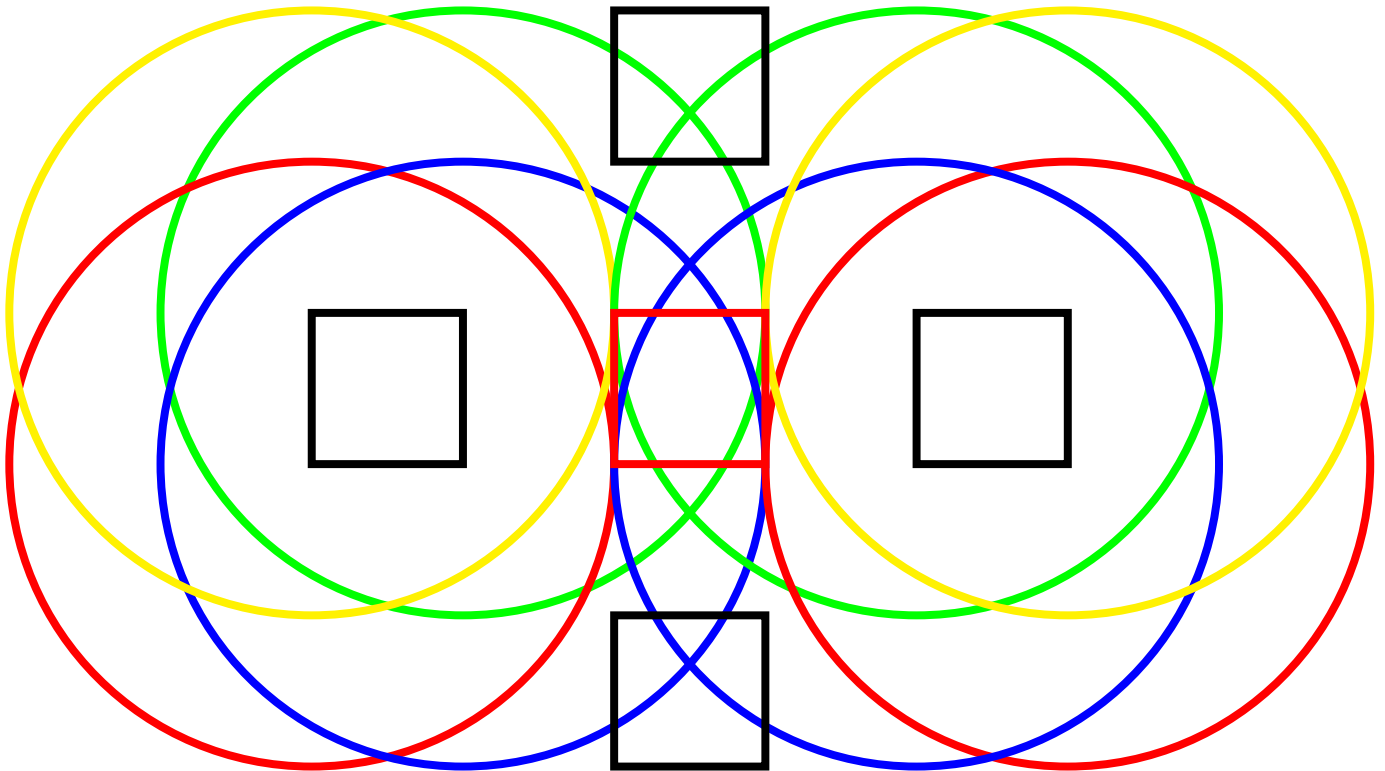


FIGURE 3.2 – Transformée de Hough étendue de deux carrés

Une alternative possible qui élimine ce problème de plusieurs paramètres est la méthode de la médiatrice.

Dans les sections suivantes, nous allons étudier la médiatrice de deux points continus qui sera étendue par la suite à la médiatrice généralisée de deux regions afin d'aboutir à la reconnaissance du cercle analytique bruité.

3.2.2 Définition de la médiatrice généralisée de deux régions

La médiatrice de deux points continus A et B dans le plan \mathbb{R}^2 est une droite orthogonale au segment [AB] passant par son milieu.

L'idée est d'étendre la médiatrice de deux points continus à la médiatrice de deux régions, en vue d'obtenir la reconnaissance du cercle analytique et de l'hypersphère analytique. Soit A et B deux points de \mathbb{R}^n . la médiatrice de deux points A et B est l'ensemble des points équidistants de A et B. Tous les points de cet ensemble sont des centres de l'hypersphère continue qui passe par les points A et B : cela correspond à l'hyperplan orthogonal au segment [AB] en son milieu. Notre démarche consiste à remplacer les points A et B par deux objets O_1 et O_2 , d'où la notion de médiatrice généralisée.

La figure3.3 montre une médiatrice de deux points continus A et B et le passage à la médiatrice des bipoints issus de O_1 et de O_2 en \mathbb{R}^2 .

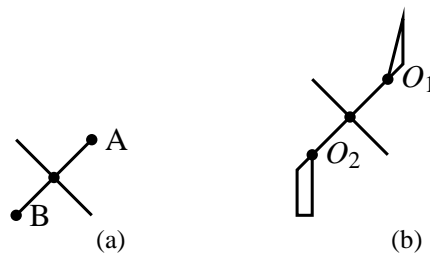


FIGURE 3.3 – Médiatrice de deux points continus et médiatrice généralisée

La médiatrice généralisée de deux régions de \mathbb{R}^n est alors définie comme suit :

Définition 64. (médiatrice généralisée de deux régions[126]) Soient O_1 et O_2 deux régions de \mathbb{R}^n . La médiatrice généralisée de O_1 et O_2 est l'ensemble des points appartenant à l'union des médiatrices de chaque couple de points continus (A, B) tels que $A \in O_1$ et $B \in O_2$.

Dans la figure 3.4, nous observons en 3.4a la médiatrice généralisée de deux objets O_1 et O_2 . L'union des points de la médiatrice des bipoints (A, B) tels que $A \in O_1$ et $B \in O_2$ constitue la médiatrice généralisée. En 3.4b, nous montrons des cercles coupant deux pavés rectangulaires. Les centres de ces cercles forment la médiatrice généralisée.

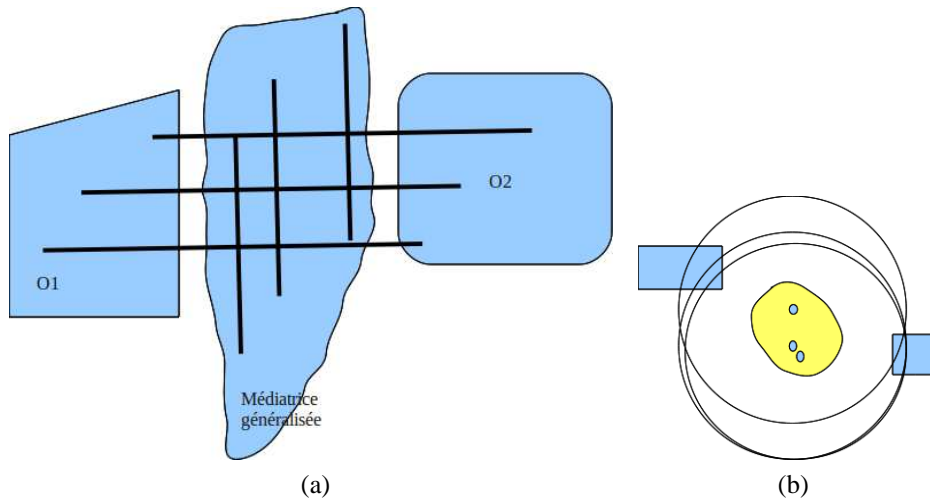


FIGURE 3.4 – Médianne généralisée de deux régions

Cette définition peut s'étendre à des dimensions supérieures, comme en dimension 3 représentée par la figure 3.5, avec deux pavés 3D.

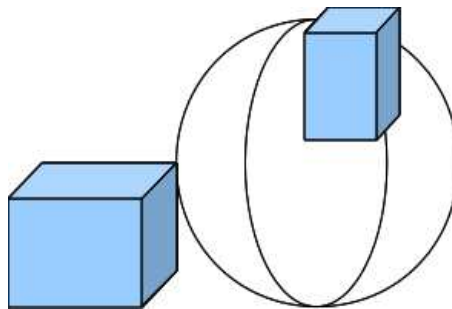


FIGURE 3.5 – Médianne généralisée de deux régions.

De plus, lorsque nous avons des cubes, leur projection nous conduit à la médianne de deux pixels. Ce qui implique que la médianne des cubes peut être déduite de la médianne des pixels à l'aide des projections. Ce qui signifie qu'une alternative consiste à ramener le problème de la reconnaissance de sphère à un problème de reconnaissance de cercles dans des espaces d'axes XY, YZ, XZ. Le temps de traitements est multiplié par trois car nous avons à établir la reconnaissance de cercles dans trois images de dimension 2 correspondant aux axes XY, YZ, XZ. La figure 3.6 illustre une projection suivant un axe de deux cubes et une sphère où la projection de la sphère touche les carrés.

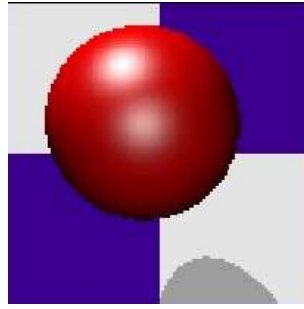


FIGURE 3.6 – Médiatrice généralisée de deux régions et une projection

Proposition 65. Soient O_1 et O_2 deux régions de \mathbb{R}^n . Si $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ alors la médiatrice généralisée de O_1 et O_2 est l'ensemble des points de l'espace \mathbb{R}^n .

Démonstration. Il existe une infinité d'hypersphères de \mathbb{R}^n passant par un point de \mathbb{R}^n □

La proposition 65 signifie que nous ne devons pas chercher des hypersphères passant par deux régions non disjointes. La figure 3.7 illustre cette proposition avec plusieurs cas en 3.7a, en 3.7b et en 3.7c, avec des régions représentées par des carrés(pixels).

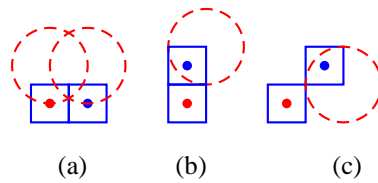


FIGURE 3.7 – Deux régions non disjointes

Nous souhaitons trouver les centres de cercles qui touchent deux régions de \mathbb{R}^2 . Pour cela soient O_i une région de \mathbb{R}^2 et $\omega(x_\omega, y_\omega)$ un point de \mathbb{R}^2 . Nous établissons deux distances euclidiennes $d_i(\omega) = \min(d(\omega, O_i))$ et $D_i(\omega) = \max(d(\omega, O_i))$. La figure 3.8 montre une région pixel O_i et les positions relatives du centre de cercle ω avec les distances d_i et D_i correspondant aux flèches colorées. Les rayons r_i des cercle passant par une région pixel O_i , centré en ω , vérifient $d_i \leq r_i \leq D_i$.

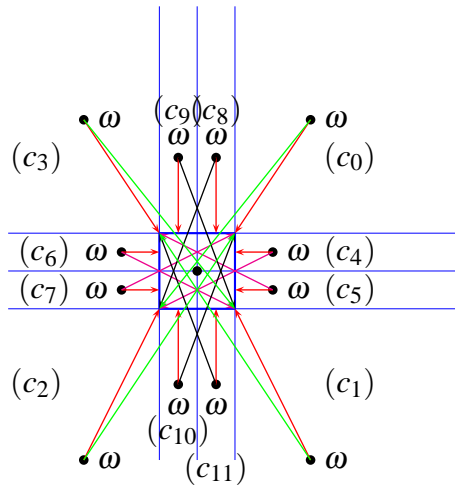


FIGURE 3.8 – Positions de ω par rapport à une région pixel

Si $O_i = \{O_1, O_2\}$, quelques configurations des centres de cercle ω sont montrées par la figure 3.9.

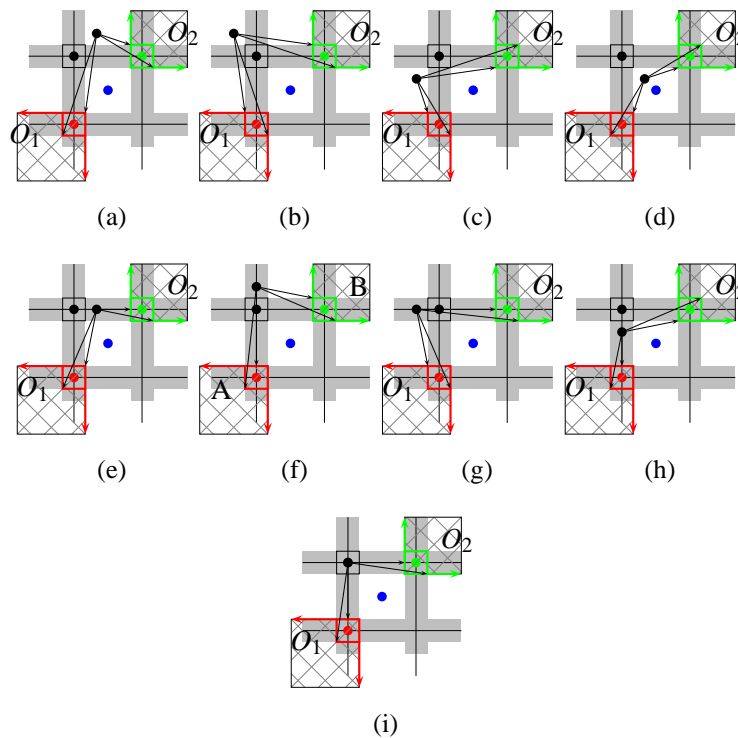


FIGURE 3.9 – Positions de ω par rapport à O_1 et O_2

Avec ces configurations, nous construisons la médiatrice généralisée en ayant à l'idée que si ω est un centre de cercle de rayon r passant par O_1 et O_2 alors r vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} d_1(\omega) \leq r \leq D_1(\omega) \\ d_2(\omega) \leq r \leq D_2(\omega) \end{cases}$$

Donc r n'est pas défini si $d_1(\omega) > D_2(\omega)$ ou $d_2(\omega) > D_1(\omega)$. Les centres de cercles sur la frontière de la médiatrice généralisée, situés entre les points où r est défini et les points où r n'est pas défini, vérifient alors $d_1(\omega) = D_2(\omega)$ ou $d_2(\omega) = D_1(\omega)$ qui permettent de déterminer les courbes de la médiatrice généralisée. Quelque soit $d_1(\omega) = D_2(\omega)$ ou $d_2(\omega) = D_1(\omega)$, nous avons deux types de courbes pour les bords de la médiatrice généralisée d'équations : une première équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x - c)^2 + (y - d)^2$ conduit à l'équation d'une droite continue $ax + by + c = 0$, et une autre de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = (y - d)^2$ ou $(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x - d)^2$ détermine l'équation d'une parabole. Lorsqu'un centre de cercle ω s'éloigne de O_1 pour aller vers O_2 , alors $d_1(\omega)$ et $D_1(\omega)$ augmentent avec $d_1(\omega) \leq D_1(\omega)$, tandis que $d_2(\omega)$ et $D_2(\omega)$ diminuent avec $d_2(\omega) \leq D_2(\omega)$. Les points ω qui ne sont pas dans la médiatrice généralisée, du côté de O_2 vérifient $d_1(\omega) \geq D_2(\omega)$. De même, lorsque un centre de cercle ω s'éloigne de O_2 pour aller vers O_1 , nous aurons $D_1(\omega) \leq d_2(\omega)$. En somme, l'existence d'un centre ω des cercles traversant deux régions O_1, O_2 est déterminée par l'intersection $I = [d_1, D_1] \cap [d_2, D_2]$. Si $I = \emptyset$, il n'y a pas cercles continus. Si $I = [r_1, R_1] \neq \emptyset$, la plage des rayons r vérifient $r \in [r_1, R_1]$.

Nous proposons ici un algorithme qui détermine la médiatrice généralisée de deux régions.

Algorithme 3.1 Calcul de la médiatrice généralisée

Soit ξ un espace image correspondant à une image composé de pixels prétraités avec un filtre (canny par exemple) pour obtenir les contours.

Début

```

pour tout O ε ξ faire
    si (( $d_A \leq D_B$ ) et ( $D_A \geq d_B$ )) then
        marquer O comme un centre de cercle dans ξ
    FinSi
FinPour

```

Fin

3.2.3 Propriétés de la médiatrice généralisée de deux régions

Lorsque des régions sont identiques comme deux cercles de même rayon ou deux pixels de même taille, il apparaît certaines propriétés relatives à la médiatrice généralisée. Ces propriétés permettent d'optimiser l'obtention de la médiatrice généralisée.

Symétrie centrale et orthogonale

Soient deux régions $O_1(x_O, y_O)$ et $O_2(x_{O'}, y_{O'})$ de \mathbb{R}^2 .

Nous définissons la symétrie centrale de centre $\omega(x_\omega, y_\omega)$ notée par $S_\omega(O_1) = O_2$ où $O_1(x_O, y_O)$, $O_2(x_{O'}, y_{O'})$ dans \mathbb{R}^2 par le système :

$$\begin{cases} x_{O'} = 2x_\omega - x_O \\ y_{O'} = 2y_\omega - y_O \end{cases} .$$

Quant à la symétrie orthogonale, l'équation de la droite (O_1O_2) est définie par $(x_b - x_a)(y - y_b) - (y_b - y_a)(x - y_a) = 0$.

La figure 3.10 montre la droite D, la médiatrice des centres des régions O_1 et O_2 . Nous avons également dans cette figure des relations de symétrie orthogonale et de symétrie centrale en ω : $S_D(m) = m_1, S_{(O_1O_2)}(m_1) = m_2, S_{(AB)}(m) = m_3, S_\omega(m) = m_2, S_\omega(m_1) = m_3$. Ces relations permettent d'optimiser l'obtention de la médiatrice généralisée.

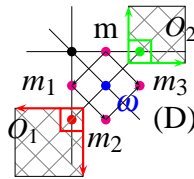


FIGURE 3.10 – Symétrie centrale et orthogonale

Comme la symétrie centrale et la symétrie orthogonale sont des isométries, si un point continu M est un centre de cercle qui touche les deux régions identiques, alors son image M' par la symétrie centrale ou la symétrie orthogonale conserve les distances et par conséquent M' est un centre de cercle qui touche les deux régions identiques symétriques. La figure 3.11 montre deux zones symétriques. Cela signifie que la médiatrice généralisée de deux régions identiques dans toutes les directions est une forme symétrique par rapport à son barycentre. Si nous considérons le tracé du bord de la médiatrice du côté de O_1 , nous pouvons déduire son tracé du côté de O_2 par symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice des centres de O_1 et O_2 .

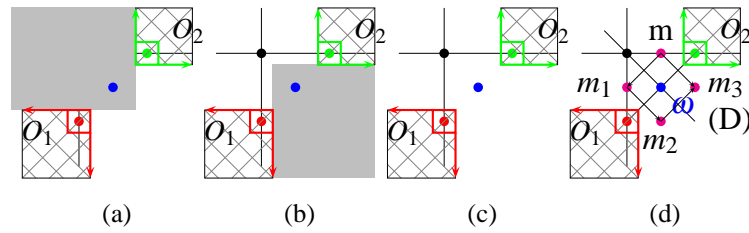


FIGURE 3.11 – Zones symétriques

Pixel commun à toutes les médiatrices

Si O_1 et O_2 sont des pixels identiques, il existe alors un pixel central touché par tous les médiatrices des couples de points de O_1 et O_2 .

Proposition 66. Soient O_1 et O_2 deux pixels centrés respectivement en (x_O, y_O) et $(x_{O'}, y_{O'})$ et $(A, B) \in (O_1, O_2)^2$. Toutes les médiatrices de $[AB]$ touche un pixel central commun.

Démonstration. Soit $(A, B) \in (O_1, O_2)^2$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$

Nous avons d'une part $x_O - \frac{1}{2} \leq x_A \leq x_O + \frac{1}{2}$ et $y_O - \frac{1}{2} \leq y_A \leq y_O + \frac{1}{2}$

et d'autre part $x_{O'} - \frac{1}{2} \leq x_B \leq x_{O'} + \frac{1}{2}$ et $y_{O'} - \frac{1}{2} \leq y_B \leq y_{O'} + \frac{1}{2}$

Finalement $\frac{x_O + x_{O'}}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{x_A + x_B}{2} \leq \frac{x_O + x_{O'}}{2} + \frac{1}{2}$ et $\frac{y_O + y_{O'}}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{y_A + y_B}{2} \leq \frac{y_O + y_{O'}}{2} + \frac{1}{2}$ □

3.2.4 Exemples de médiatrice de deux régions

Lorsque O_1 et O_2 sont des disques, la médiatrice généralisée est une hyperbole comme nous pouvons le voir dans la figure 3.12 :

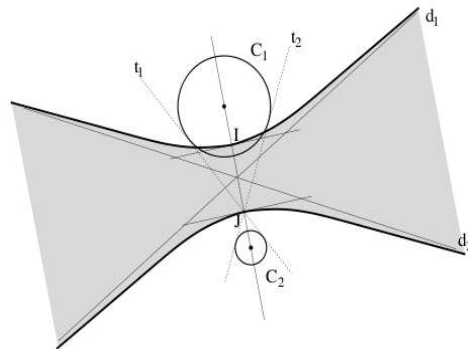


FIGURE 3.12 – Exemple d'une médiatrice généralisée de deux disques

Lorsque O_1 et O_2 sont des pixels, les bordures de la médiatrice généralisée sont composées alors de droites et de paraboles suivant que le centre est situé dans la zone des abscisses ou dans la zone des ordonnées des points continus des deux pixels.

Nous observons dans la figure 3.13 une parabole entre deux droites parallèles correspondant aux ordonnées des sommets du pixel O_2 .

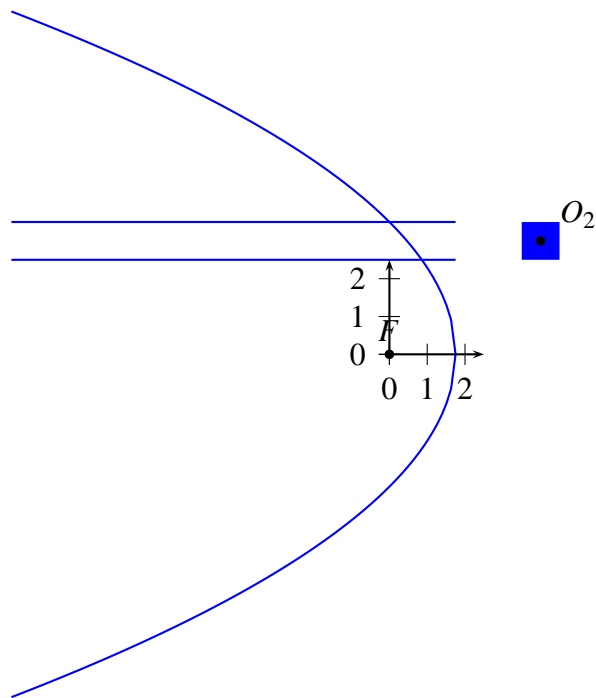


FIGURE 3.13 – Parabole de foyer F

Nous obtenons la forme de la médiatrice généralisée, illustrée dans la figure 3.14.

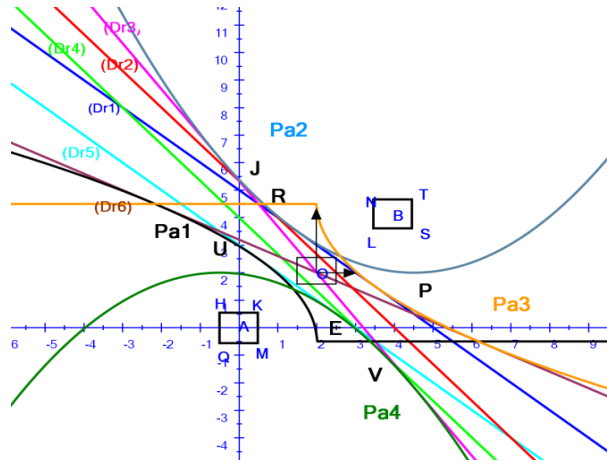


FIGURE 3.14 – Courbes de la Médiatrice généralisée de deux pixels

Le tableau 3.1 définit les droites et les paraboles de la figure 3.14.

Droites	Définition
(Dr1)	médiatrice de [KL]
(Dr2)	médiatrice de [KS]
(Dr3)	médiatrice de [HS]
(Dr4)	$S_o(D2) = D4$
(Dr5)	médiatrice de [QL]
(Dr6)	médiatrice de [MN]
Paraboles	(Pa1) (Pa2) (Pa3) (Pa4)

TABLE 3.1 – Médiatrices et paraboles

En somme, la médiatrice généralisée est l'aire représentée dans la figure 3.15.

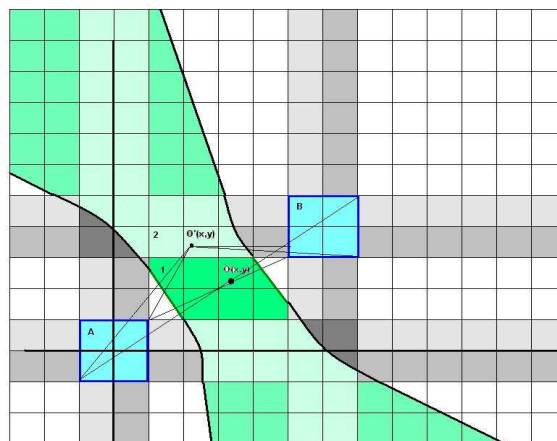


FIGURE 3.15 – Aire de la Médiatrice généralisée de deux pixels

3.2.5 Reconnaissance du cercle analytique

Nous expliquons dans cette section comment nous pouvons réaliser la reconnaissance du cercle analytique puis étendons cela à la reconnaissance de l'hypersphère analytique.

Intersection des médiatrices généralisées de deux régions

Dans l'espace euclidien, par trois points continus il passe un cercle continu unique. Nous voulons étendre cela dans le discret en considérant trois régions, comme trois pixels, dans le but de borner l'ensemble des centres de cercles continus qui passent par les trois régions.

Dans la figure 3.16, nous avons trois régions en dimension 2, traversées par un cercle euclidien avec des médiatrices des points O, A et O, B. Les deux médiatrices se coupent en un point continu qui est un centre de cercle qui passe par les trois points.

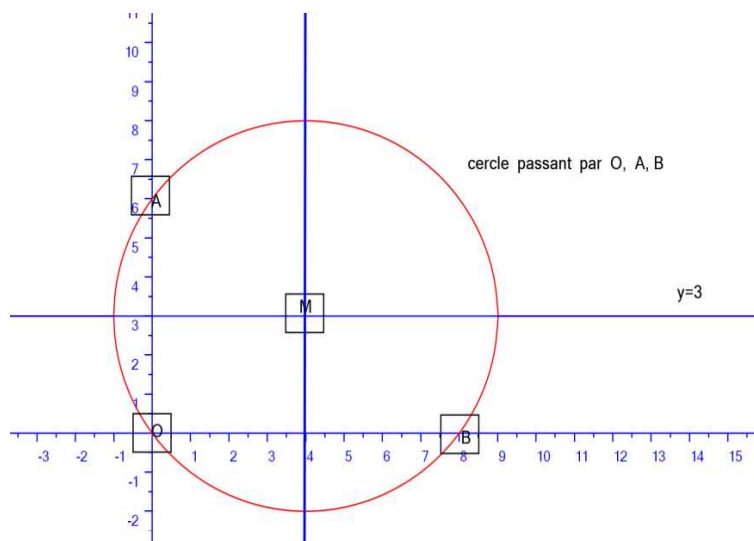


FIGURE 3.16 – Cercle passant par trois régions pixels

Définition 67. (*Intersection des médiatrices généralisées[126]*) Les centres communs aux cercles (CC), passant par deux régions au moins de $R = (R_i)_{i \in [1,n]}$ est défini par l'intersection des médiatrices généralisées (MG) de tous les deux régions :

$$CC(R) = \bigcap_{i,j \in [1,n], i < j} (MG(R_i, R_j)).$$

La définition 67 permet de trouver les centres communs à des cercles continus traversant deux régions. Cet ensemble de centres communs est noté $CC(R)$. La figure 3.17 montre des centres communs à des cercles traversant deux régions.

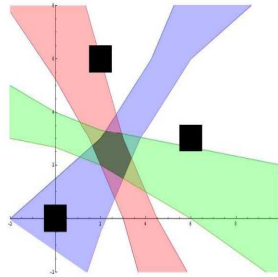


FIGURE 3.17 – Centres communs à plusieurs cercles traversant au moins deux régions($CC(R)$)

Nous allons montrer que chaque point de $CC(R)$ est un centre d'au moins un cercle continu, qui traverse toutes les régions au lieu de deux régions. Autrement dit, existe-t-il un cercle continu qui touche toutes les n régions, centré en un point de $CC(R)$? Pour élucider cette question, nous allons d'abord analyser le rayon d'un cercle qui touche n régions, ensuite rappeler le théorème de Helly[121]. Lorsque ω appartient à $CC(R)$ avec $R = (R_i)_{i \in [1,n]}$, alors ω appartient à chaque médiatrice généralisée d'après la définition 67 de $CC(R)$. Pour chaque médiatrice généralisée, nous avons $I = [d_i, D_i] \cap [d_j, D_j] = [r_{ij}, R_{ij}] \neq \emptyset$. Notons que chaque intervalle $[d_i, D_i]$ est convexe et de dimension 1.

Rappelons le théorème de Helly[121].

Théorème 68. (Théorème de Helly[121]) Soit $F = \{E_1, E_2, \dots, E_{m-1}, E_m\}$ une famille finie de m sous-ensembles convexes de E^n en dimension n . Si chaque $(n+1)$ uplets d'éléments de F possède un élément commun, alors $\bigcap_{1 \leq j \leq m} E_j \neq \emptyset$.

En appliquant ce théorème[121], nous posons $E_i = [d_i, D_i]$ de dimension 1. Nous avons ici $n+1=2$. Nous savons que chaque couple (E_i, E_j) correspondant à une médiatrice généralisée n'est pas vide, alors $\bigcap_{1 \leq j \leq m} E_j \neq \emptyset$. Ce qui signifie qu'il existe un cercle continu centré en ω traversant toutes les régions.

Finalement nous proposons le théorème suivant :

Théorème 69. (Existence d'un cercle) Si l'intersection de toutes les médiatrices généralisées $CC(R)$ de n régions $R = (R_i)_{i \in [1,n]}$, prises deux à deux n'est pas vide ie $CC(R) = \bigcap_{i,j \in [1,n], i < j} (MG(R_i, R_j)) \neq \emptyset$, alors $\forall \omega \in CC(R)$, il existe au moins un cercle continu centré en ω qui traverse toutes les n régions $R = (R_i)_{i \in [1,n]}$.

Démonstration. La preuve est une application du théorème de Helly[121] à un ensemble d'intervalles $[d_i, D_i]$ de dimension 1. □

Les figures 3.18 montrent des centres de cercles passant par plusieurs pavés de taille variée : nous avons des centres de cercles passant par trois pixels en 3.18a, et en 3.18b, des centres de cercles passant par des pavés de taille variée, pour prendre en compte le cas des structures multi-échelles de l'image.

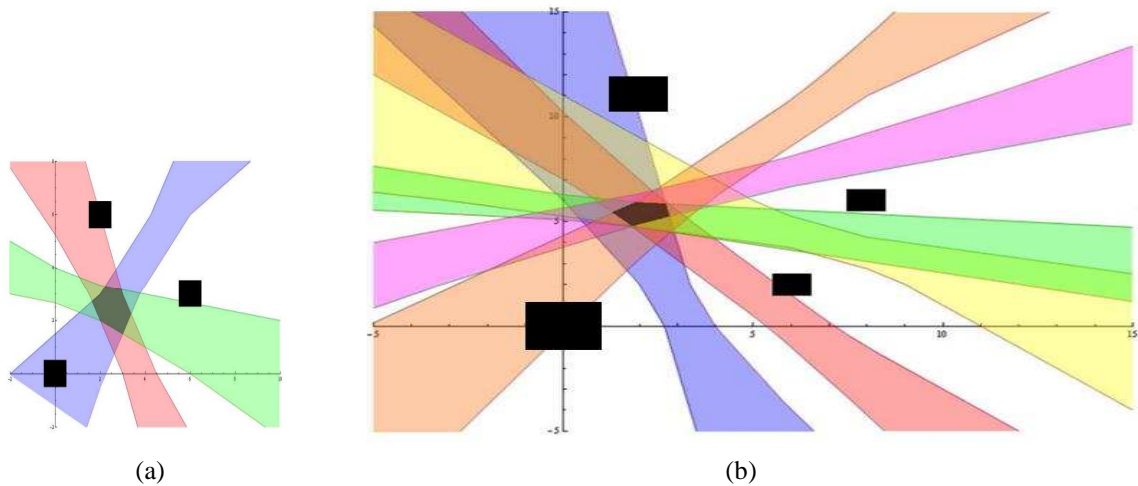


FIGURE 3.18 – Intersection des médiatrices généralisées

Dans le cas de la reconnaissance du cercle naïf, une région est un losange interne d'un pixel.

Algorithme simplifié

Nous utilisons cette définition 67 pour construire un algorithme comme suit :

Algorithme 3.2 Reconnaissance d'une hypersphère analytique discrète.

Données : Soit P un ensemble de n régions ou de n pavés c'est à dire $P=\{p_1,p_2,\dots,p_{n-1}, p_n \}$

Variables intermédiaires :

i et j sont des compteurs de pavés

S est un ensemble de couples de pavés de P

CC est un ensemble de points contenant les centres de cercles passant par n régions(Pavés)

MG est un ensemble de points de la médiatrice Généralisée de deux régions(Pavés)

Résultat :

retourne un Booléen, vaut **vrai** si P forme une hypersphère analytique discrète, vaut **faux** si P ne forme pas une hypersphère analytique discrète

Début

CC= \emptyset

Calculer $S=\{(p_i,p_j)\in P^2 \text{ avec } i\neq j\}$

CC=MG(p_1,p_2)

$S=S-\{(p_1,p_2)\}$

Tant que $S\neq\emptyset$ **Faire**

Retirer un couple (p_i,p_j) de S

Calculer MG(p_i,p_j)

CC=CC \cap MG

FinTantque

Retourner(CC $\neq\emptyset$)

Fin

Algorithme complet

Nous proposons un algorithme similaire, au cas de l'algorithme complet pour la reconnaissance des hyperplans analytiques.

Soit δ le seuil indiquant le nombre minimum des hypervoxels que peut contenir une hypersphère analytique ou une partie d'une hypersphère analytique.

Soit S une image possédant n objets ou n hypervoxels allumés. On note $S=\{ O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, O_n \}$ un ensemble d'hypervoxels allumés. Soit $C =\{(O_i, O_j, O_k) \in S^3 \setminus \{i, j \text{ et } k \text{ distincts}\} \}$ avec $\text{card}(C)=C_n^3$. Pour chaque triplet de C (O_u, O_{u+1}, O_{u+2}), on construit un arc ou une hypersphère $S_O=\{ O_u, O_{u+1}, O_{u+2}, \dots, O_{v-1}, O_v \}$. On pose $C_O=\{(O_i, O_j, O_k) \in S_O^3 \setminus \{i, j \text{ et } k \text{ distincts}\} \}$. Puis nous calculons $C=C-C_O$ et l'on reprend le même processus jusqu'à ce que $C=\emptyset$.

L'algorithme que nous proposons est défini par :

Algorithme 3.3 Reconnaissance d'une hypersphère analytique

Data : Soit S un ensemble de n objets $\{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n\}$ d'une image.

Begin

Calculer $C = \{(k_i, k_j, k_l) \in S^3 \mid i, j \text{ et } k \text{ distincts}\}$

Tant que $C \neq \emptyset$ faire

 Pour chaque triplet (k_u, k_{u+1}, k_{u+2}) de C construire $S_k = \{k_u, k_{u+1}, k_{u+2}, \dots, k_{v-1}, k_v\}$

 Calculer $C_k = \{(k_i, k_j, k_l) \in S_k^3 \mid i, j \text{ et } l \text{ distincts}\}$

 Calculer $C = C - C_k$

Fin tant que

Les S_k représentent des arcs et des hypersphères

End

Calcul des rayons correspondant à un centre de cercles continus

Dans cette section, nous proposons un algorithme de calcul des rayons correspondant à un centre de cercles continus, passant par n régions.

Algorithme 3.4 Calcul des rayons par rapport à un centre

Données : Soit P un ensemble de n régions(pavés) ie $P=\{p_1,p_2,\dots,p_{n-1}, p_n \}$

Variables et fonctions intermédiaires :

S est un ensemble de couples de pavés de P

CC est un ensemble de points contenant les centres de cercles passant par n régions(Pavés)

MG est un ensemble de points de la médiatrice Généralisée de deux régions(Pavés)

$R_{i,min}$ et $R_{i,max}$ rayon minimal et Maximal respectivement pour un pavé p_i (Ce sont des tableaux de n éléments)

Résultat :

retourne R_{min} et R_{max} correspondant à l'intervalle $[R_{min}, R_{max}]$

Début

$R_{min} =0$

$R_{max} =0$

Calculer $S=\{(p_i,p_j)\in P^2 \text{ avec } i\neq j\}$

$CC=MG(p_1,p_2)$

$S=S-\{(p_1,p_2)\}$

Tant que $S\neq\emptyset$ Faire

Retirer un couple (p_i,p_j) de S

Calculer $MG(p_i,p_j)$

$CC=CC\cap MG$

FinTantque

Si $(CC\neq\emptyset)$ alors // il y a un cercle

Soit $u \in CC$

Pour i variant de 1 à n faire

$R_{i,min}=Min (d_{v\in p_i}(u,v))$

$R_{i,max}=Max (d_{v\in p_i}(u,v))$

FinPour

$R_{min} =R_{1,min}$ et $R_{max}=R_{1,max}$

Pour i variant de 2 à n faire

$[R_{min} ,R_{max}]=[R_{i,min}, R_{i,max}]\cap [R_{min} ,R_{max}]$

FinPour

retourner $[R_{min} ,R_{max}]$

Fin

Les paramètres (u,R_{min},R_{max}) peuvent être représentés en dimension 3.

3.2.6 Conception informatique

Nous définissons le concept de *Bordure de la médiatrice généralisée proche ou éloignée d'une région* qui sera utilisé dans le diagramme de classe du système.

Définition 70. (Bordure de la médiatrice généralisée proche ou éloignée d'une région) Soient A et B deux régions de \mathbb{R}^2 . Nous appelons la bordure de la médiatrice généralisée proche de B (respectivement A), l'ensemble des points, défini par $C_B^+ = \{O \in \mathbb{R}^2 / d_A = d_B\}$ (respectivement $C_A^+ = \{O \in \mathbb{R}^2 / d_A =$

d_B }).

Nous appelons la bordure de la médiatrice généralisée éloignée de B (respectivement A), l'ensemble des points, défini par $C_B^- = C_A^+ = \{O \in \mathbb{R}^2 / d_A = d_B\}$ (respectivement $C_A^- = C_B^+ = \{O \in \mathbb{R}^2 / d_A = d_B\}$).

La figure 3.19 montre un diagramme de classes pour représenter les données du système.

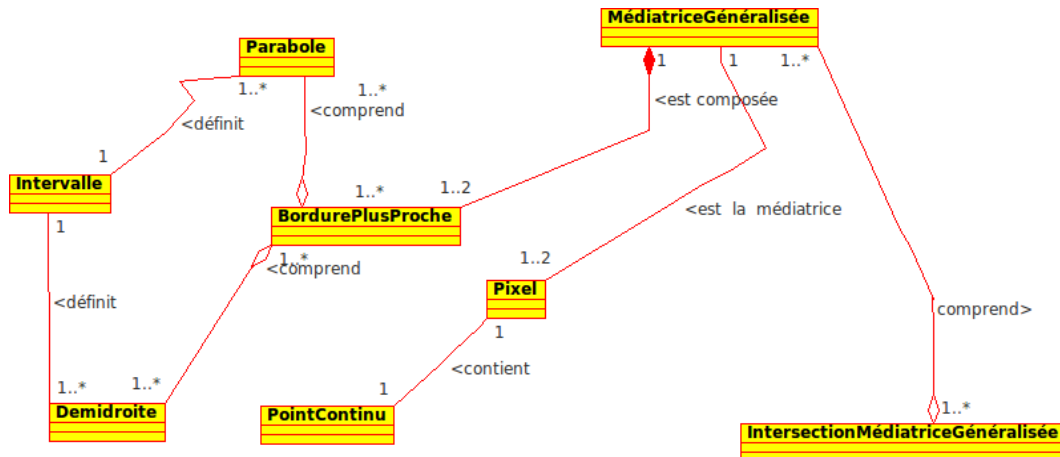


FIGURE 3.19 – Diagramme de classes

3.3 Médiatrices de pavés bruités

La médiatrice généralisée appliquée aux pavés flous permet d'aboutir à la reconnaissance de cercles analytiques flous.

La figure 3.20 met en évidence une représentation des centres de cercles passant par les noyaux en bleu. Nous avons là, deux représentations de la médiatrice généralisée de deux régions, l'une étant incluse dans l'autre, pour deux pavés flous séparés.

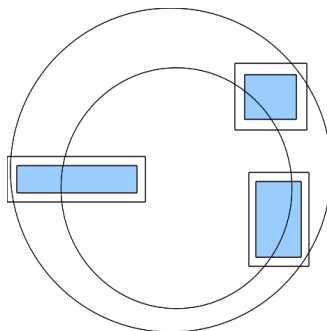


FIGURE 3.20 – Médiatrice généralisée appliquée à des pavés bruités

3.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'introduire une méthode de reconnaissance d'une hypersphère analytique, dans un environnement bruité et multi-échelle. Cette méthode prend en compte la détection des arcs de cercles analytiques discrets notamment le cercle naïf et le cercle standard.

La section 3.2 de ce chapitre a été l'objet d'un article accepté à la conférence internationale Comp'Image 2010 et publié dans le journal en 2010[126].

En perspective, des travaux sur la médiatrice généralisée restent à réaliser pour aboutir à un programme informatique, en intégrant d'autres travaux réalisés après la publication de notre article[126] sur la médiatrice généralisée [94, 96].

Chapitre 4

Reconnaissance de droites analytiques et reconstruction polynomiale

Sommaire

4.1	Introduction	135
4.2	Transformée de Hough standard étendue	136
4.2.1	Dual d'un segment	136
4.2.2	Dual d'un pixel	138
4.2.3	Analyse du dual d'un pixel	143
4.2.4	Approximation du dual d'un pixel	147
4.2.5	Préimage de pixels	150
4.2.6	Conception informatique	154
4.3	Autres pavés	154
4.4	Reconstruction polynomiale	157
4.5	Conclusion	160

4.1 Introduction

Ce chapitre étend la transformée de Hough standard pour prendre en compte la reconnaissance de droites analytiques naïves et standard. L'extension proposée conserve les propriétés de la transformée de Hough standard telles que la limitation de l'espace de paramètres et la détection de droites verticales. La transformée de Hough standard associe un point de l'espace image à une courbe sinusoidale

dans l'espace de paramètres. Une technique de reconstruction polynomiale est également proposée.

Nous abordons dans la section 4.2, la transformée standard étendue : en 4.2.1, le dual d'un segment et dans la section 4.2.2, le dual d'un pixel. Les sections 4.2.3 et 4.2.4 sont des analyses du dual d'un pixel pour aboutir à une nouvelle définition de la préimage et des algorithmes de reconnaissance de droites analytiques dans la section 4.2.5. Nous abordons brièvement une application de la transformée de Hough standard à d'autres pavés rectangulaires et triangulaires dans la section 4.3. Ce chapitre se termine par une méthode de reconstruction polynomiale dans la section 4.4.

4.2 Transformée de Hough standard étendue

Nous nous intéressons dans cette section à la reconnaissance des droites analytiques bruitées multi-échelles dont les concepts ont été présentés dans le chapitre 1.

La définition du dual d'un point continu utilisée dans cette section est équivalente à la définition de la transformée de Hough standard d'un point continu.

4.2.1 Dual d'un segment

Le dual d'un objet est l'union du dual de chacun de ces points continus. Il en est de même pour le dual d'un segment. Nous proposons le théorème 71 ci-dessous que nous avons introduit dans l'article [31], pour déterminer le dual d'un segment .

Théorème 71. *Le dual d'un segment est une surface limitée par le dual de ses extrémités.*

Démonstration. Soit $[AC]$ un segment dans un espace image tels que $C(x_c, y_c)$ et $A(x_a, y_a)$. Posons $M(x_m, y_m) \in [AC]$.

Nous savons que le $\text{dual}(A)$, $\text{dual}(C)$, $\text{dual}(M)$ sont respectivement un ensemble de points (θ, r_a) , (θ, r_c) , (θ, r_m) vérifiant respectivement les équations :

$$r_a = x_a \cos \theta + y_a \sin \theta \quad (4.1)$$

$$r_c = x_c \cos \theta + y_c \sin \theta \quad (4.2)$$

$$r_m = x_m \cos \theta + y_m \sin \theta \quad (4.3)$$

Nous avons également

$$\overrightarrow{OM} = k * \overrightarrow{OA} + (1 - k) * \overrightarrow{OC} \quad (4.4)$$

où $k \in \mathbb{R}$, $0 \leq k \leq 1$.

Nous obtenons avec (4.1), (4.2) et (4.3) que

$$(4.4) \Rightarrow x_m = k * x_a + (1 - k) * x_c \quad (4.5)$$

et

$$(4.4) \Rightarrow y_m = k * y_a + (1 - k) * y_c \quad (4.6)$$

.

Alors en considérant (4.5) et (4.6) nous concluons $r_m = k * (x_a \cos \theta + y_a \sin \theta) + (1 - k) * (x_c \cos \theta + y_c \sin \theta)$

Cela implique $r_m = k * r_a + (1 - k) * r_c$.

Cela signifie $r_a \leq r_m \leq r_c$ ou $r_c \leq r_m \leq r_a$.

Donc, la courbe dual(M) est entre la courbe dual(A) et la courbe dual(C).

Réciproquement, supposons $N(\theta_1, r_1)$ un point entre la courbe dual(A) et la courbe dual(C). Nous voulons montrer qu'il existe un point $M \in [AC]$ tel que la courbe dual(M) passe par N.

Nous avons $r_c(\theta_1) \leq r_1 \leq r_a(\theta_1)$ ou $r_a(\theta_1) \leq r_1 \leq r_c(\theta_1)$

Cela signifie $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq k \leq 1$ tel que

$$r_1 = k * r_a(\theta_1) + (1 - k) * r_c(\theta_1) \quad (4.7)$$

Comme $r_a(\theta_1) = x_a \cos \theta_1 + y_a \sin \theta_1$ et $r_c(\theta_1) = x_c \cos \theta_1 + y_c \sin \theta_1$

alors, nous obtenons

$$(4.7) \Rightarrow r_1 = k * (x_a \cos \theta_1 + y_a \sin \theta_1) + (1 - k) * (x_c \cos \theta_1 + y_c \sin \theta_1) \quad (4.8)$$

donc

$$(4.8) \Rightarrow r_1 = (k * x_a + (1 - k) * x_c) \cos \theta_1 + (k * y_a + (1 - k) * y_c) \sin \theta_1 \quad (4.9)$$

.

Finalement (4.9) implique que le point de coordonnées $((k * x_a + (1 - k) * x_c), (k * y_a + (1 - k) * y_c))$ est sur le segment [AC].

□

La figure 4.1 montre un segment [AC] avec $M \in [AC]$ en 4.1a, le dual de M entre le dual de A et C

en4.1b, la surface équivalente au dual de [AC] en 4.1c.

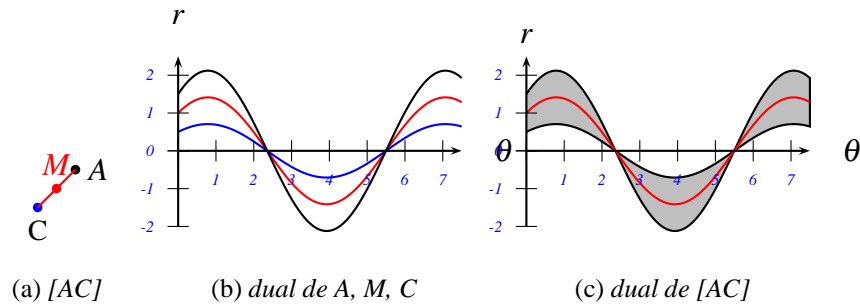


FIGURE 4.1 – Dual d'un segment

A partir du dual d'un segment, nous construisons le dual d'un pixel.

4.2.2 Dual d'un pixel

Nous considérons un pixel comme une surface centrée en (p_1, p_2) , un \mathbb{Z}^2 point c'est à dire l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x - p_1| \leq \frac{1}{2}, |y - p_2| \leq \frac{1}{2}\}$. Le dual de p est alors l'union du dual de chaque point (x, y) .

Définition 72. Soit p un pixel centré (p_1, p_2) dans un espace image ξ . Le dual de p est un ensemble de points continus de l'espace de paramètres \mathcal{Q} , définis par $dual(p) = \{(\theta, r) \in \mathcal{Q}^2 / \forall (\alpha, \beta) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2, r = (p_1 + \alpha) \cos \theta + (p_2 + \beta) \sin \theta\}$.

La figure 4.2 montre la transformée de Hough standard du pixel centré en $(1,1)$: chaque sommet est associé à sa courbe duale.

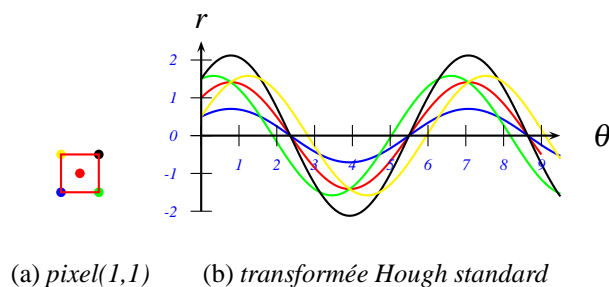


FIGURE 4.2 – Extension de la Transformée de Hough standard

Soient A, B, C, D les sommets d'un pixel p , comme illustrés par la figure 4.3 page suivante. Un pixel est un ensemble infini de segments verticaux en (4.3a) ou de segments horizontaux en (4.3b). Nous avons également les diagonales en (4.3c).

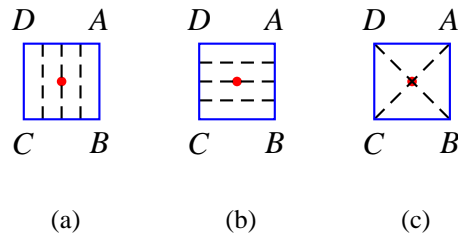


FIGURE 4.3 – Segments d'un pixel

Notre objectif est de déterminer le dual d'un pixel en utilisant le dual de ses segments verticaux, diagonaux ou horizontaux. Nous proposons le théorème 73 suivant.

Théorème 73. Soit p un pixel dans $\xi_2(\subset \mathbb{R}^2)$. Son dual est une surface limitée par les courbes duales de ses côtés verticaux. Ce champ est également limité par les courbes duales des côtés horizontaux ou par les courbes duales des diagonales.

Démonstration. Soit p un pixel avec ses sommets A, B, C, D dans un espace image comme dans la figure 4.4.

D'abord, nous montrons que le dual d'un pixel est une surface limitée par le dual de ses côtés verticaux $[AB]$ et $[CD]$. Le dual d'un segment est obtenu par le théorème 71. Soit N un point dans un pixel p avec des sommets A, B, C, D où $N \notin \{A, B, C, D\}$. Il existe deux points I, J tels que $N \in [IJ]$ où $I \in [CD], J \in [AB]$. Nous notons que $[IJ]$ est un segment. Selon le théorème 71, le dual de N est une courbe sinusoidale entre les duals de I et J . Comme $I \in [CD], J \in [AB]$, Le dual de I est entre les duals de C et D . Le dual de J est également entre les duals de A et B . Donc, le dual de N est entre les surfaces limitées par les duals de $[AB]$ et $[CD]$. Réciproquement, soit N' un point dans la surface limitée par les duals de $[AB]$ et $[CD]$. N' est entre deux courbes sinusoidales, les duals de deux sommets X, Y avec $(X, Y) \in \{A, B, C, D\}^2$. Un pixel est convexe, donc $[XY] \subset p$. Selon le théorème 71, il existe un point $s \in [XY]$ dans le pixel tel que $\text{dual}(s)$ est une courbe sinusoidale qui passe par N' .

Ensuite, nous montrons que le dual d'un pixel est une surface limitée par le dual de ses côtés horizontaux $[AD]$ et $[BC]$. Par analogie au premier cas, nous définissons un point N dans un pixel ou $N \notin \{A, B, C, D\}$. Il existe deux points I, J tels que $N \in [IJ]$ où $I \in [AD], J \in [BC]$. Comme $I \in [AD], J \in [BC]$, le dual de I est entre le dual de A et D . Le dual de J est entre les duals de B et C . Donc, le dual de N est entre les surfaces limitées par les duals de $[AD]$ et $[BC]$. Nous pouvons également noter que l'application d'une symétrie centrale par rapport au centre du pixel transforme un côté horizontal en un côté vertical.

Réciproquement, soit N' un point dans la surface limitée par le dual $[AD]$ et $[BC]$. N' est entre deux courbes sinusoïdales, les duals de deux sommets X, Y avec $(X, Y) \in \{A, B, C, D\}^2$. Un pixel est convexe, donc $[XY] \subset p$. Selon le théorème 71, il existe un point $s \in [XY]$ dans le pixel tel que $\text{dual}(s)$ est une courbe sinusoïdale qui passe par N' .

Troisièmement, nous montrons que le dual d'un pixel est une surface limitée par les segments diagonales $[AC], [BD]$. Ils existent deux points I, J tel que $N \in [IJ]$ ou $I \in [AC], J \in [BD]$. Comme $I \in [AC], J \in [BD]$, le dual de I est entre le dual de A et C . Le dual de J est entre les duals de B et D . Donc, le dual de N est dans la surface limitée par le dual de $[AC]$ et $[BD]$.

Réciproquement, soit N' un point dans la surface limitée par le dual de $[AC]$ et $[BD]$. N' est entre deux courbes sinusoïdales, les duals de deux sommets X, Y avec $(X, Y) \in \{A, B, C, D\}^2$. Un pixel est convexe, donc $[XY] \subset p$. Selon le théorème 71, il existe un point $s \in [XY]$ dans le pixel tel que $\text{dual}(s)$ est une courbe sinusoïdale qui passe par N' . □

Nous avons une illustration de cette preuve dans la figure 4.4 où nous pouvons voir les points N, I, J dans les différents cas de côtés et de diagonales : nous avons les côtés verticaux en 4.4a, les côtés horizontaux en 4.4b, les diagonales en 4.4c.

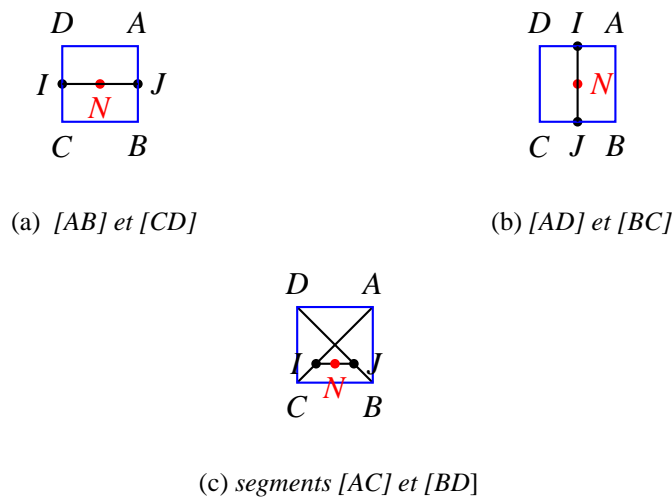


FIGURE 4.4 – Segments horizontaux, verticaux et diagonaux d'un pixel

Soit p un pixel centré en $(1,1)$ avec les sommets A, B, C, D comme dans la figure 4.4. Les figures 4.5 page suivante, 4.6, 4.7 illustrent comment nous obtenons la surface du dual d'un pixel avec l'application du théorème 73 : nous déterminons le dual de ses côtés et les diagonales et la surface associée.

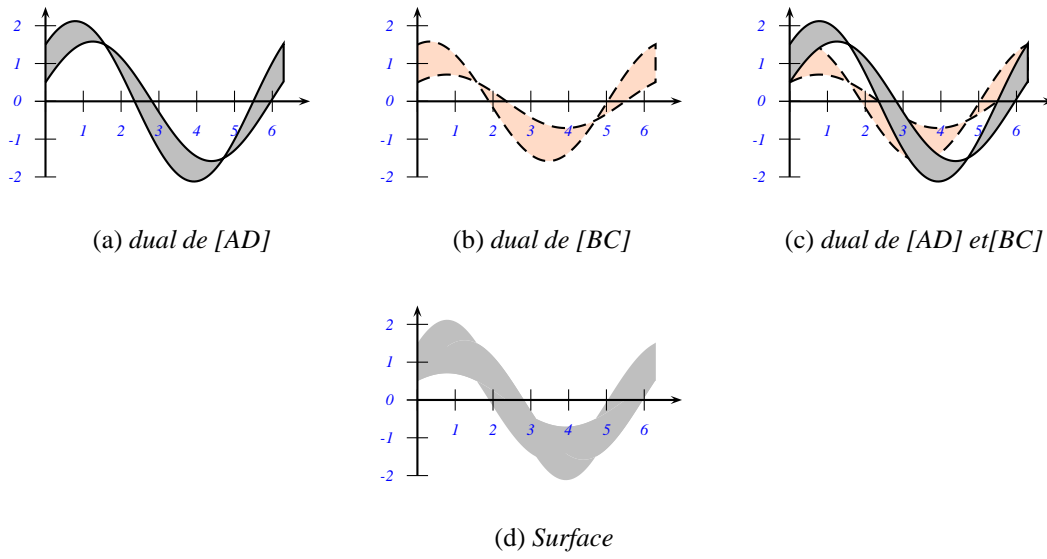


FIGURE 4.5 – Côtés horizontaux

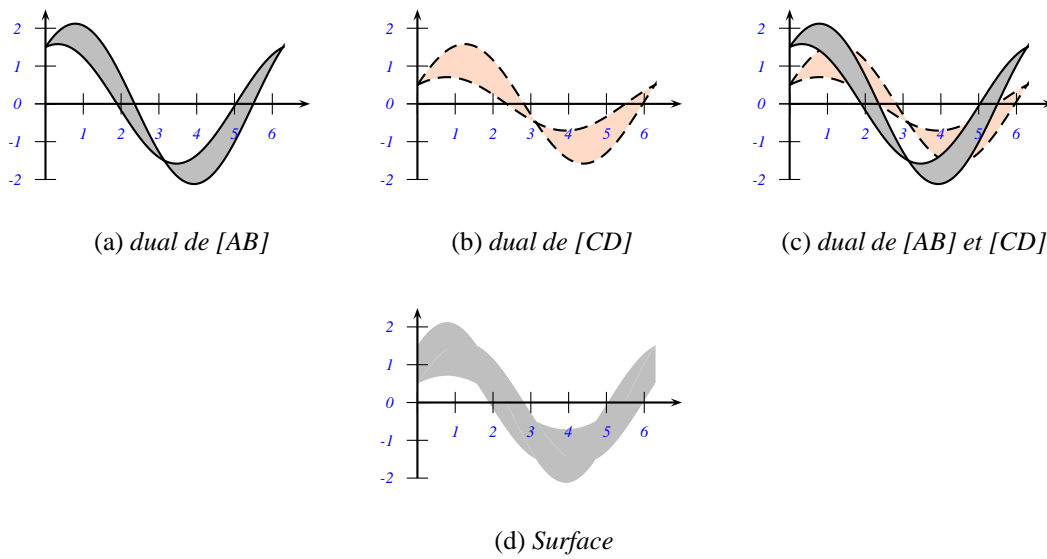


FIGURE 4.6 – Côtés Verticaux

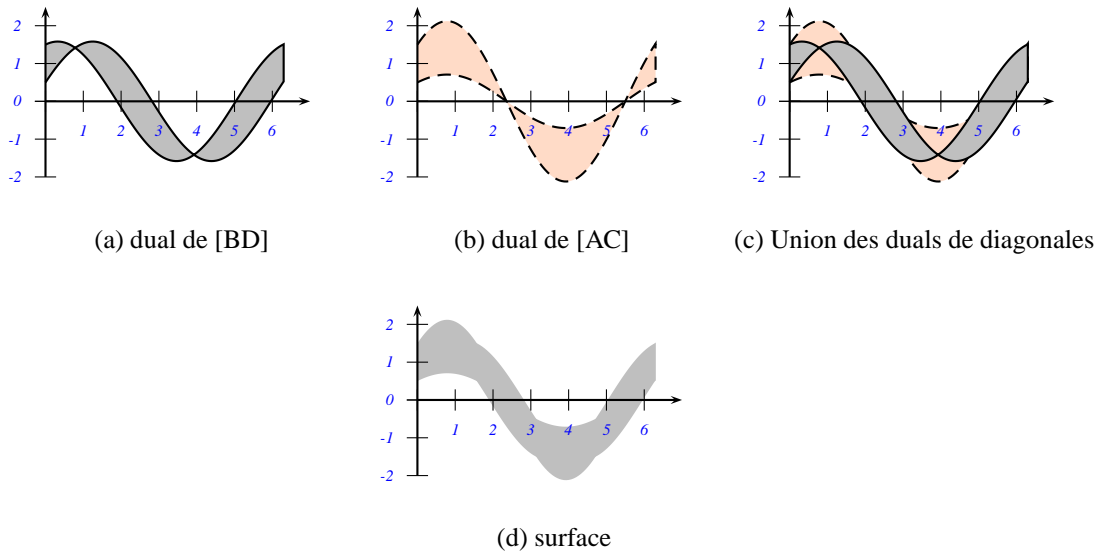


FIGURE 4.7 – Diagonales

Nous observons dans la figure précédente 4.7, il n'existe pas d'espace vide entre le dual de diagonales. Alors, le dual d'un pixel est facilement calculable par le théorème suivant 74.

Théorème 74. *Le dual d'un pixel est l'union du dual de ses segments diagonaux.*

Démonstration. Soit p un pixel et ses sommets A, B, C, D et ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Dans le théorème précédent 73, nous avons montré que le dual d'un pixel est une surface comprise entre le dual de ses diagonales. Nous allons montrer que cette surface est équivalente à l'union de duals de ses diagonales. Cela signifie pour un point dans le dual d'un pixel, il doit appartenir au dual de $[AC]$ ou au dual de $[BD]$. $[AC]$ et $[BD]$ ont un point commun, le centre O de pixel. Donc, le dual de O est une courbe sinusoïdale dans le dual($[AC]$) et le dual($[BD]$) selon le théorème 71. Avec $\theta \in [0, 2\pi]$, nous pouvons classer les dual(A), dual(B), dual(O), dual(C), dual(D) par la relation \leq ou \geq . dual(O) se situe au milieu de cette classification.

Alors, nous aurons

$$\text{dual}([AC]) \subset \text{dual}([BD]) \text{ ou } \text{dual}([BD]) \subset \text{dual}([AC])$$

Comme conclusion, l'ensemble des points N vérifiant la proposition $[N \in \text{dual}(p) \text{ avec } (N \notin \text{dual}([AC])) \text{ et } (N \notin \text{dual}([BD]))]$ est \emptyset . □

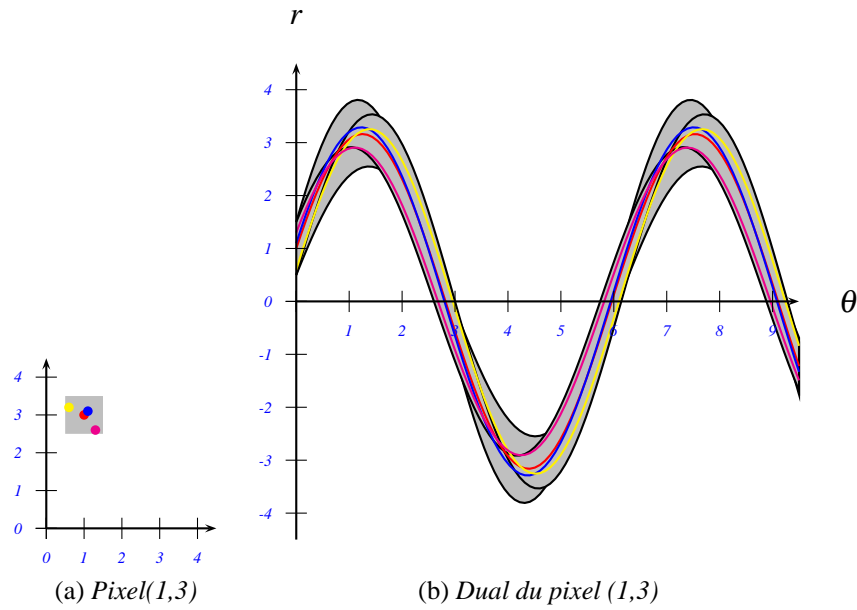


FIGURE 4.8 – Extension de la transformée de Hough standard

Nous avons dans la figure 4.8, un pixel (1,3) et son dual : le dual de chacun des points du pixel est dans l'aire.

4.2.3 Analyse du dual d'un pixel

Cette section concerne l'étude du dual d'un pixel en faisant ressortir des points remarquables qui pourront être utiles pour une approximation.

Soit (p_1, p_2) un centre de pixel avec ses sommets $A(p_1 + \frac{1}{2}, p_2 + \frac{1}{2})$, $B(p_1 + \frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2})$, $C(p_1 - \frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2})$, $D(p_1 - \frac{1}{2}, p_2 + \frac{1}{2})$.

Alors, $\text{dual}(A)$, $\text{dual}(C)$, $\text{dual}(B)$, $\text{dual}(D)$ sont respectivement donné par :

$$\text{dual}(A) : r_A = (p_1 + \frac{1}{2}) \cos \theta + (p_2 + \frac{1}{2}) \sin \theta \quad (4.10)$$

$$\text{dual}(C) : r_C = (p_1 - \frac{1}{2}) \cos \theta + (p_2 - \frac{1}{2}) \sin \theta \quad (4.11)$$

$$dual(B) : r_B = (p_1 + \frac{1}{2}) \cos \theta + (p_2 - \frac{1}{2}) \sin \theta \quad (4.12)$$

$$dual(D) : r_D = (p_1 - \frac{1}{2}) \cos \theta + (p_2 + \frac{1}{2}) \sin \theta \quad (4.13)$$

En considérant (4.10), (4.12), (4.11), (4.13), avec $\theta \in [0, 2\pi]$, nous avons les points d'intersection.

$$dual(B) \cap dual(D) = \{K, L\} \quad (4.14)$$

$$dual(A) \cap dual(C) = \{I, J\} \quad (4.15)$$

$$dual(A) \cap dual(B) = \{O_1, F_0, H_1\} \quad (4.16)$$

$$dual(A) \cap dual(D) = \{E_1, G_0\} \quad (4.17)$$

$$dual(B) \cap dual(C) = \{E_0, G_1\} \quad (4.18)$$

$$dual(C) \cap dual(D) = \{O_0, F_1, H_0\} \quad (4.19)$$

La table 4.1 ci dessous donne plus de détails sur les coordonnées des points d'intersections.

θ	Points externes
0	$O_0(0, p_1 - \frac{1}{2}), O_1(0, p_1 + \frac{1}{2})$
$\frac{\pi}{2}$	$E_0(\frac{\pi}{2}, p_2 - \frac{1}{2}), E_1(\frac{\pi}{2}, p_2 + \frac{1}{2})$
π	$F_0(\pi, -(p_1 + \frac{1}{2})), F_1(\pi, -(p_1 - \frac{1}{2}))$
$3\frac{\pi}{2}$	$G_0(3\frac{\pi}{2}, -(p_2 + \frac{1}{2})), G_1(3\frac{\pi}{2}, -(p_2 - \frac{1}{2}))$
2π	$H_0(2\pi, p_1 - \frac{1}{2}), H_1(2\pi, p_1 + \frac{1}{2})$
θ	Points internes
$\frac{\pi}{4}$	$K(\frac{\pi}{4}, (p_1 + p_2)\frac{\sqrt{2}}{2})$
$3\frac{\pi}{4}$	$I(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}(p_2 - p_1))$
$5\frac{\pi}{4}$	$L(\frac{5\pi}{4}, -(p_1 + p_2)\frac{\sqrt{2}}{2})$
$7\frac{\pi}{4}$	$J(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}(p_1 - p_2))$

TABLE 4.1 – Coordonnées de points d'intersection

Comme nous pouvons le voir dans la figure 4.9, les points I, J sont les intersections du dual de A et C ; Dans la figure 4.10, le dual de B et D avec les points communs et plus de détails sont fournis avec la figure 4.11.

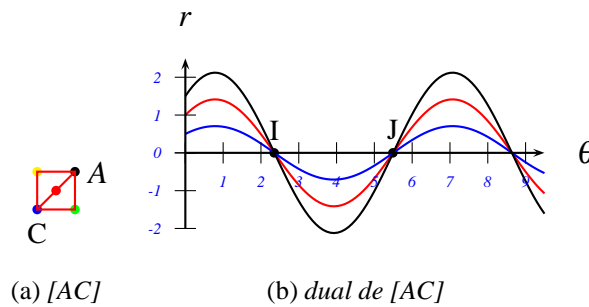


FIGURE 4.9 – dual d'un segment

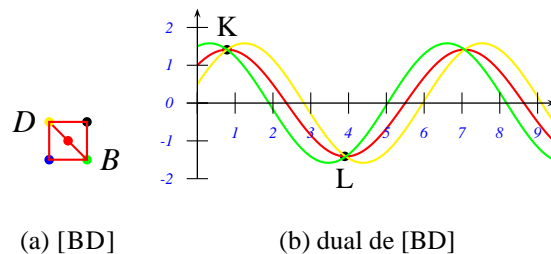


FIGURE 4.10 – dual d'un segment

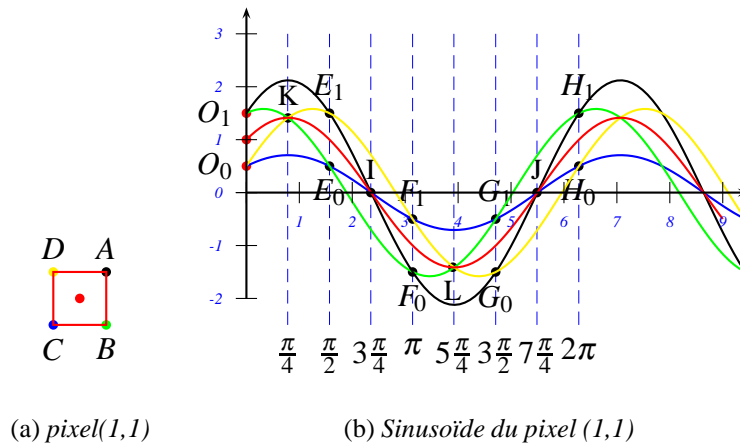


FIGURE 4.11 – Courbes sinusoidales

En suivant les valeurs de θ dans $[0, 2\pi]$, nous établissons les tables 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 qui comparent dans chaque intervalle, les valeurs du dual des sommets.

θ	$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$
relation	$r_C \leq r_D \leq r_B \leq r_A$	$r_C \leq r_B \leq r_D \leq r_A$

TABLE 4.2 – $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

θ	$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4} \leq \theta < \pi$
relation	$r_B \leq r_C \leq r_A \leq r_D$	$r_B \leq r_A \leq r_C \leq r_D$

TABLE 4.3 – $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

θ	$\pi \leq \theta < \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$
relation	$r_A \leq r_B \leq r_D \leq r_C$	$r_A \leq r_D \leq r_B \leq r_C$

TABLE 4.4 – $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

θ	$\frac{3\pi}{2} \leq \theta < \frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4} \leq \theta < 2\pi$
relation	$r_D \leq r_A \leq r_C \leq r_B$	$r_D \leq r_C \leq r_A \leq r_B$

TABLE 4.5 – $\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

Quand θ parcourt les valeurs $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, nous observons que les courbes externes r_i deviennent r_i internes et réciproquement.

En considérant la relation :

$$r = x * \cos\theta + y * \sin\theta \iff -r = x * \cos(\theta + \pi) + y * \sin(\theta + \pi) \quad (4.20)$$

Nous travaillons sur un intervalle $[0, \pi]$, avec les tables 4.2, 4.3 et les points externes et internes de cet intervalle. Les autres points et les tables 4.4, 4.5 sont des déductions.

4.2.4 Approximation du dual d'un pixel

Dans cette section, nous proposons une alternative d'approximation du champ du dual d'un pixel, car plusieurs possibilités de méthodes d'approximation du dual peuvent être analysée. En géométrie algorithmique, des algorithmes existent pour calculer l'intersection de polygone convexes.

Dans notre méthode, nous considérons une approximation polygonale basée sur quelques points du dual pour obtenir des paramètres (θ, r) : l'idée est que si un objet O' est une approximation d'un objet O alors $\text{dual}(O')$ sera également une approximation de $\text{dual}(O)$.

De plus, si $O' \subset O$, alors $\text{dual}(O') \subset \text{dual}(O)$. Certains points du pixel initial sont utilisés pour obtenir l'approximation du dual.

Soit p un pixel centré en (p_1, p_2) . Le pixel p possède les sommets :

$$A(p_1 + \frac{1}{2}, p_2 + \frac{1}{2}), B(p_1 + \frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2}), C(p_1 - \frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2}), D(p_1 - \frac{1}{2}, p_2 + \frac{1}{2}).$$

Soit p^i un pixel centré en (p_1, p_2) avec ses sommets :

$$A^i(p_1 + \frac{1}{2} - i * \delta, p_2 + \frac{1}{2}), B^i(p_1 + \frac{1}{2}, p_2 - \frac{1}{2} + i * \delta), C^i(p_1 - \frac{1}{2} + i * \delta, p_2 - \frac{1}{2}), D^i(p_1 - \frac{1}{2}, p_2 + \frac{1}{2} - i * \delta).$$

où $i \in \mathbb{N}$ et $\delta \in [0,1]$ avec les contraintes $i * \delta \in \{0,1\}$. Les duals des sommets de p^i sont :

$$dual(A^i) : r_{A^i} = (p_1 + \frac{1}{2} - i * \delta) \cos \theta + (p_2 + \frac{1}{2}) \sin \theta \quad (4.21)$$

$$dual(C^i) : r_{C^i} = (p_1 - \frac{1}{2} + i * \delta) \cos \theta + (p_2 - \frac{1}{2}) \sin \theta \quad (4.22)$$

$$dual(B^i) : r_{B^i} = (p_1 + \frac{1}{2}) \cos \theta + (p_2 - \frac{1}{2} + i * \delta) \sin \theta \quad (4.23)$$

$$dual(D^i) : r_{D^i} = (p_1 - \frac{1}{2}) \cos \theta + (p_2 + \frac{1}{2} - i * \delta) \sin \theta \quad (4.24)$$

Alors, p^i est un pixel approximatif de p où $i * \delta$ est la différence avec les coordonnées réelles des sommets de p . La valeur maximale de $i * \delta$ est la valeur de l'erreur de tolérance.

Nous utilisons les points externes (voir la table 4.1 de la section 4.2.3) du dual des pixels $p^0, p^1, p^2, \dots, p^n$ pour obtenir une approximation polygonale du dual de p avec $p^0 = p^{n+1} = p$.

Nous savons que

$$p^{n+1} = p \iff (n+1) * \delta = 1$$

Alors

$$\delta = \frac{1}{n+1}.$$

Finalement, nous avons besoin de prendre $\delta = \frac{1}{n+1}$ pour avoir les pixels $p^0, p^1, p^2, \dots, p^n$.

Comme nous travaillons dans $[0, \pi]$, nous déterminons l'approximation du dual de cet intervalle. Nous obtenons le polygone $O_1E_1F_1F_0E_0O_0$. avec le pixel p^0 , (voir la figure 4.11 pour plus de détails). La figure 4.12 montre le polygone en rouge.

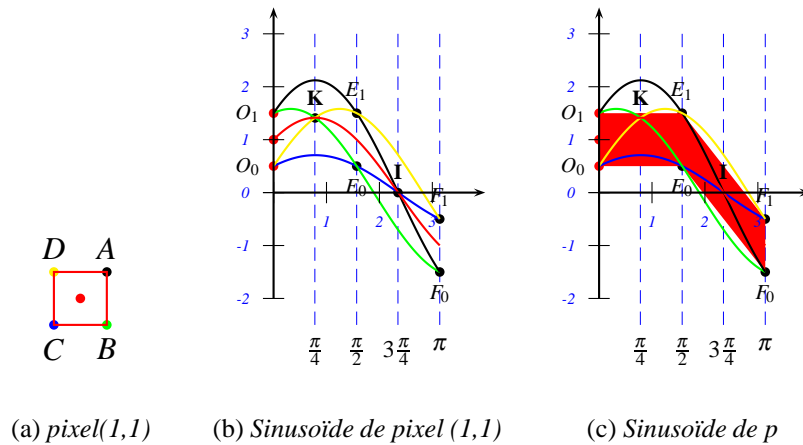


FIGURE 4.12 – Courbes sinusoidales

Les points communs des sommets avec $i \geq 1$:

$$\text{dual}(A^i) \cap \text{dual}(B^i) = \{O_1^i\}, \text{dual}(A^i) \cap \text{dual}(D^i) = \{E_1^i\}, \text{dual}(B^i) \cap \text{dual}(C^i) = \{F_0^i\}, \text{dual}(C^i) \cap \text{dual}(D^i) = \{O_0^i\}.$$

Comme p^i est proche de p , les points d'intersection sont proches de $O_1, E_1, F_1, F_0, E_0, O_0$ respectivement.

Le polygone proposé est alors $O_1 O_1^1 \dots O_1^n E_1 E_1^1 \dots E_1^n F_1 F_0 E_0^n \dots E_0^1 E_0 O_0^n \dots O_0^1 O_0$.

Posons S_n la surface associée à ce polygone. Selon les tables 4.2, 4.3, nous savons que la mesure de la surface du dual d'un pixel est :

$$\int_{[0, \frac{\pi}{2}]} (r_A - r_C) dx + \int_{[\frac{\pi}{2}, \pi]} (r_D - r_B) dx = 4.$$

L'erreur estimée est $4 - S_n$ et le pourcentage associé sera alors $\frac{4 - S_n}{4}$.

Si $\delta = \frac{1}{4}$, nous obtenons $p^1 = p'(p_1, p_2)$, $p^2 = p''(p_1, p_2)$, $p^3 = p'''(p_1, p_2)$ sont représentés dans la figure 4.13.

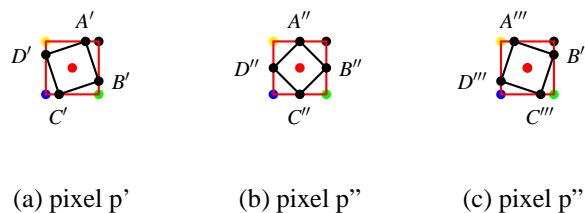


FIGURE 4.13 – Approximation de pixels

Nous illustrons étape par étape le polygone proposé dans les figures 4.14, 4.15

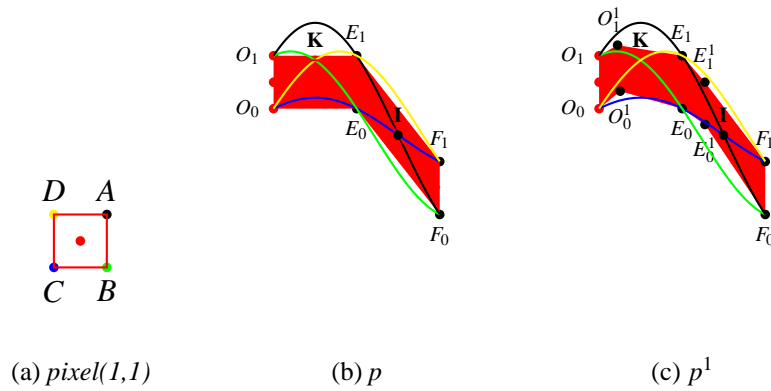


FIGURE 4.14 – Courbes sinusoidales

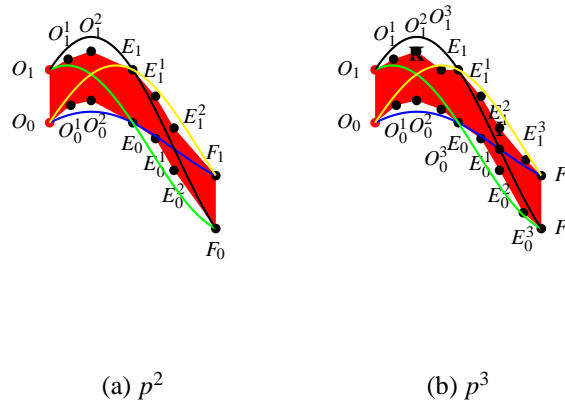


FIGURE 4.15 – Points à l'intérieur des Courbes sinusoidales

4.2.5 Préimage de pixels

Nous introduisons ici une nouvelle définition de la préimage d'un ensemble de pixels. La préimage de n pixels est une intersection de n surfaces sinusoidales. Elle est différente de la définition introduite par Martine Dexet dans sa thèse en 2006[1] qui est basée sur la transformation d'un point continu en une droite. Le dual utilisé dans cette préimage réalise une transformation d'un point continu en une courbe sinusoidale.

Définition 75. Soit $S=\{P_1,P_2,\dots,P_{n-1},P_n\}$ un ensemble de n pixels P_i dans ξ_2 . La préimage de S est définie par $Preimage(S) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} Dual(P_i)$.

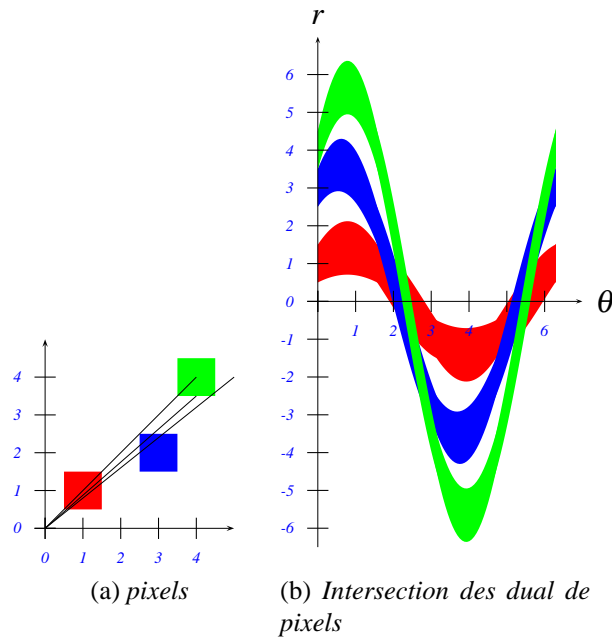


FIGURE 4.16 – Préimage de trois pixels

Dans la figure 4.16, nous voyons en 4.16a trois pixels colorés. En 4.16b, le dual correspondant à chacun de ces pixels. L'intersection de ces trois duals est un ensemble de points représentant les paramètres (θ, r) de droite qui traverse chaque pixel.

Les paramètres $(-r, \cos\theta, \sin\theta)$ sont identiques aux paramètres (c_0, c_1, c_2) de la droite analytique. Comme nous pouvons le voir dans la figure 4.16, la préimage de n pixels donne deux champs parce que :

$$r = x * \cos\theta + y * \sin\theta \iff -r = x * \cos(\theta + \pi) + y * \sin(\theta + \pi) \quad (4.25)$$

Algorithme simple

Nous rappelons que le terme dual indique la transformée de Hough standard étendue. Nous pouvons voir que lorsque le dual d'un losange de chaque pixel est considéré, nous nous trouvons dans le cas de la reconnaissance de droite naïve.

De plus, selon la définition de l'hyperplan naïf et standard ainsi que de leur construction géomé-

trique, nous voyons que la préimage contient les paramètres de droites continues qui traversent les pixels. Nous proposons l'algorithme suivant :

Algorithme 4.1 Reconnaissance de droite naïve et standard

Données : Soit S un ensemble de n pixels P_1, \dots, P_n .

Début

Preimage \leftarrow dual(P_1)

$i \leftarrow 2$

Tant que Preimage $\neq \emptyset$ and $i \leq n$ **faire**

Preimage \leftarrow Preimage \cap dual(P_i)

$i \leftarrow i+1$

Fin tant que

Si Preimage $\neq \emptyset$ **alors**

S appartient à une droite discrète analytique naïve ou standard

Sinon

S n'appartient pas à une droite discrète analytique naïve ou standard

FinSi

Fin

Le dual(P_i) peut être remplacé par une approximation polygonale par exemple afin de réduire les calculs et d'accroître les performances de l'algorithme.

L'extension de la transformée de Hough standard(ETHS) répond à la question : comment pouvons nous reconnaître la droite naïve ou standard par la transformée de Hough standard ? Elle conserve les propriétés de la transformée de Hough standard(THS)[7], notamment la taille de l'espace de paramètres limitée avec $\theta \in [0, \pi]$ et $\rho \in [-\sqrt{col^2 + row^2}, \sqrt{col^2 + row^2}]$ avec une image colonne x ligne. Elle prend en compte la détection des droites verticales.

Considérons une image illustrée par la figure 4.17 avec des droites continues.

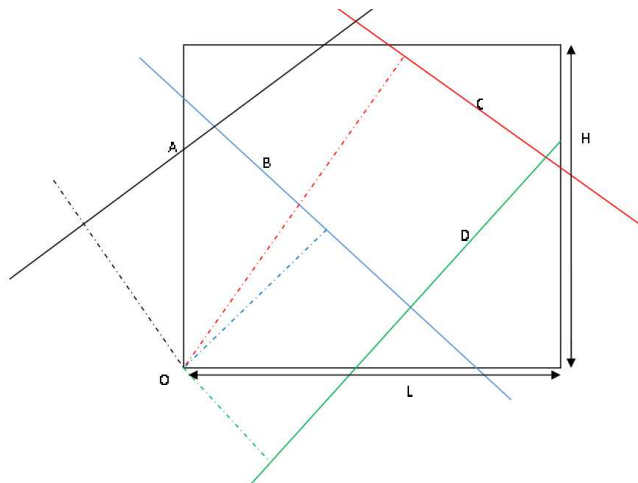


FIGURE 4.17 – Droites continues dans une image

Nous allons établir un encadrement de ρ avec une image $H \times L$. Soit $M(x_M, y_M)$ un point continue d'une image I (comme dans la figure 4.17), appartenant à une droite continue $D(\theta, \rho) = \{(x, y) \in I \mid \rho = x \cos \theta + y \sin \theta\}$, nous avons $\rho = OM \cos(\theta + \alpha)$, $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OX})}$.

Comme $-1 \leq \cos(\theta + \alpha) \leq 1$ et $OM \leq \sqrt{H^2 + L^2}$

Nous obtenons $-\sqrt{H^2 + L^2} \leq OM \cos(\theta + \alpha) \leq OM \leq \sqrt{H^2 + L^2}$.

D'où $-\sqrt{H^2 + L^2} \leq OM \cos(\theta + \alpha) \leq \sqrt{H^2 + L^2} \iff -\sqrt{H^2 + L^2} \leq \rho \leq \sqrt{H^2 + L^2}$.

Finalement $\rho \in [-\sqrt{H^2 + L^2}, \sqrt{H^2 + L^2}]$

Algorithme complet

Supposons n pixels allumés dans une image. La reconnaissance ne consiste pas seulement à vérifier si n pixels forment un hyperplan. L'algorithme précédent de la section 4.2.5 reste donc limité. Nous avons également besoin de vérifier s'il existe également $n - \alpha$ pixels formant un hyperplan avec $1 \leq \alpha \leq n$. Cela conduit à considérer un seuil δ représentant le nombre minimum d'hypervoxels que nous acceptons appartenir à un hyperplan. Le seuil choisi doit améliorer les performances de l'algorithme final pour limiter les traitements.

Soit δ le seuil indiquant le nombre minimum d'hypervoxels que devra contenir un hyperplan analytique. Soit $S = \{O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, O_n\}$ un ensemble d'hypervoxels allumés. Selon la définition de la préimage. Pour chaque couple d'objets ou d'hypervoxels O_i et O_j , nous regardons si les autres objets ou hypervoxels forment un hyperplan analytique avec eux. Le nombre de couples est $C_n^2 = 0 + 1 + \dots + n - 2 + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Soit $C = \{(O_i, O_j) \in S^2 \mid i \neq j\}$. Il est clair $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. Cela signifie que nous pouvons écrire également $\text{dual}(P1) \cap (\text{dual}(P2) \cap \text{dual}(P3)) = (\text{dual}(P1) \cap \text{dual}(P2)) \cap \text{dual}(P3)$ avec la distributivité de l'intersection. Si le sous ensemble d'objets $S_O = \{O_u, O_{u+1}, \dots, O_{v-1}, O_v\}$ de S avec la cardinalité ($S_O \geq \delta$) du couple (O_u, O_{u+1}) conduit à un hyperplan analytique ; cela signifie que $\bigcap_{k \in [u, v]} \text{dual}(O_k) \neq \emptyset$. Quelque soit la permutation de S_O , nous obtenons le même hyperplan. Soit C_O un ensemble de couplets associé à S_O tel que $C_O = \{(O_i, O_j) \in S_O^2 \mid i \neq j\}$. Nous savons que $\text{card}(C_O) = C_{\text{card}(S_O)}^2$. Nous retirons chaque couple de C_O de C . Ce qui donne $C = C - C_O$. Nous continuons le traitement en prenant les prochains couples de C en analysant les prochains pour trouver d'autre hyperplan jusqu'à $C = \emptyset$.

Nous proposons l'algorithme ci-dessous.

Algorithme 4.2 reconnaissance d'un hyperplan naïf, standard et supercouverture

Données : Soit S un ensemble de n objets $\{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n\}$ d'une image.

Début

Calculer $C = \{(k_i, k_j) \in S^2 \mid i \neq j\}$

Tant que $C \neq \emptyset$ faire

 Pour chaque couple (k_u, k_{u+1}) de C construire $S_k = \{k_u, k_{u+1}, \dots, k_{v-1}, k_v\}$

 Calculer $C_k = \{(k_i, k_j) \in S_k^2 \mid i \neq j\}$

 Calculer $C = C - C_k$

Fin tant que

Les S_k représentent les hyperplans analytiques

Fin

4.2.6 Conception informatique

Nous proposons ici un diagramme de classes non détaillées qui représente la conception simplifiée du système.

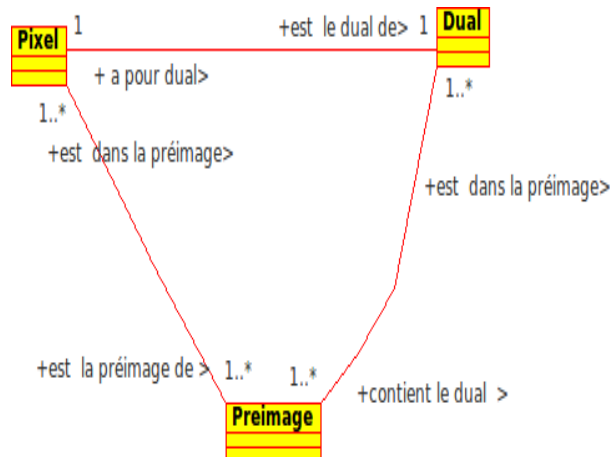


FIGURE 4.18 – Diagramme de classes du système

4.3 Autres pavés

Si le pavé est un rectangle comme dans le cas de grille irrégulière isothétique, le dual est également l'union des points continus appartenant au rectangle. La figure 4.19 montre le dual d'un ensemble de points continus d'un rectangle. Ce dual peut se ramener à l'union du dual de chaque côté diagonal du rectangle comme pour le carré.

Théorème 76. *le dual d'un rectangle est l'union du dual de ses segments diagonales.*

Démonstration. La preuve est identique à la preuve du théorème 74 relatif au dual d'un pixel (carré). □

L'importance de ce dual peut se voir dans les pavés rectangulaires des grilles isothétiques.

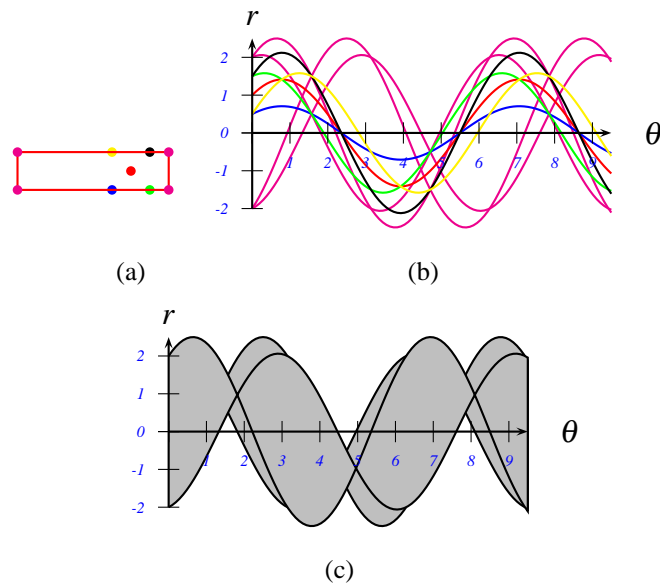


FIGURE 4.19 – *Extension de la Transformée de Hough standard pour le rectangle*

Nous pouvons obtenir alors la préimage de rectangles comme le montre la figure 4.20.

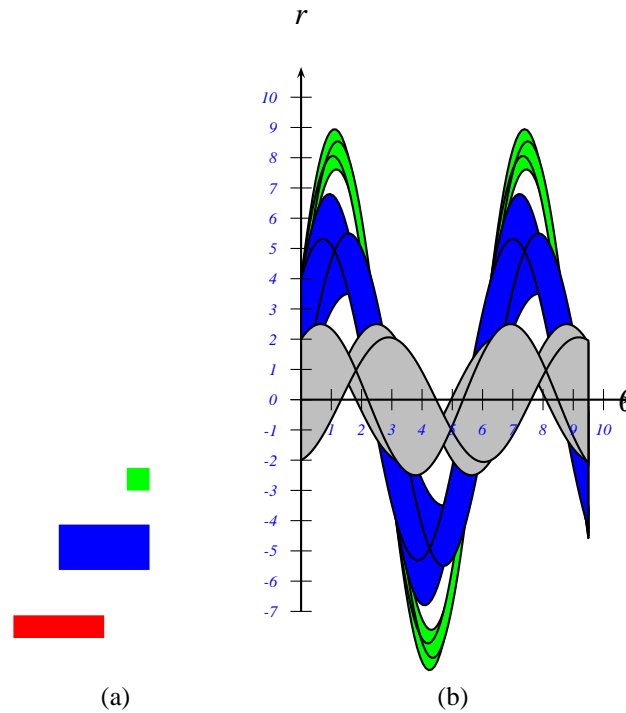


FIGURE 4.20 – Prémimage de rectangles

Il en est de même du calcul du dual d'un triangle dépendant de ces points continus. Nous proposons le théorème 77 suivant qui établit facilement le dual d'un triangle.

Théorème 77. *Le dual d'un triangle est l'union du dual de deux de ses côtés adjacents ou consécutifs.*

Démonstration. Soient $[AC]$ et $[AB]$ deux côtés adjacents d'un triangle (ABC) comme nous pouvons le voir dans la figure 4.21. Soit N un point dans le triangle (si N est un sommet, c'est fini). Il existe deux points I et J tels que $I \in [AC]$, $J \in [AB]$ et $N \in [IJ]$. Par analogie avec la preuve du théorème 73. Nous avons deux côtés consécutifs $[AC]$ et $[AB]$ qui sont sécantes en A d'un triangle (ABC) . Alors, la surface entre le dual de $[AC]$ et le dual $[AB]$ ne contient pas d'espace vide. De plus, nous savons que le dual de I est entre le dual de A et le dual de C . De même, le dual de J est entre le dual de A et le dual de B . Comme nous savons que le dual de N est entre le dual de I et le dual de J , alors le dual de N est dans l'union du dual de $[AC]$ et dual de $[AB]$. \square

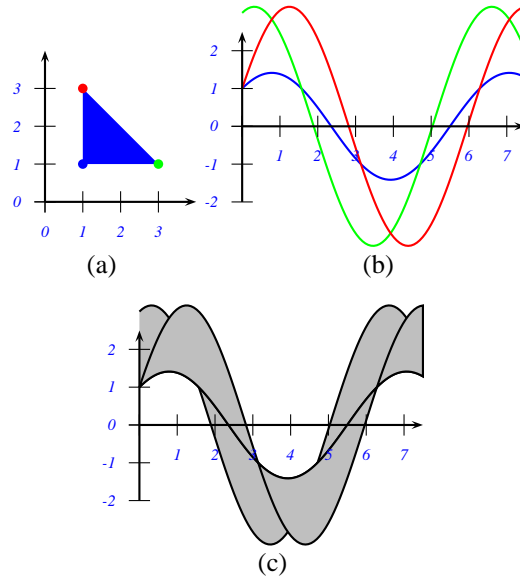


FIGURE 4.21 – Transformée de Hough standard d'un triangle

La figure 4.21 montre en 4.21a un triangle, le dual des sommets en 4.21b et le dual du triangle en 4.21c en application du théorème 77.

Des études approfondies sur ces préimages peuvent être envisagées notamment en proposant des approximations des courbes sinusoidales comme les approximations avec la méthode des rectangles et des trapèzes[130]. Cependant, nous pouvons déjà représenter l'espace de paramètres comme une image avec des points pics dont les coordonnées correspondent aux paramètres des droites continues qui permettent en faisant une discrétisation supercouverture d'obtenir une droite supercouverture.

4.4 Reconstruction polynomiale

Dans un espace discret, les couples $(x_i, f(x_i)) \in \mathbb{Z}^2$, le polynôme $P_n(x)$ est le résultat de la reconstruction polynomiale des points discrets $(x_i, f(x_i))$. La figure 4.22 montre la reconstruction polynomiale des points discrets $(0,1), (1,3), (3,2), (4,5)$ étape par étape en (4.22b) et en (4.22c).

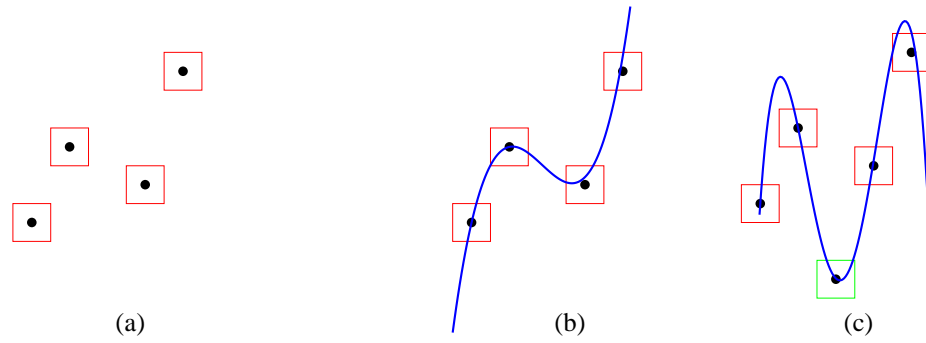


FIGURE 4.22 – Points discrets et reconstruction polynomiale

A travers le théorème de l'interpolation polynomiale de Lagrange, nous voyons que la complexité temporelle de la méthode, pour n points discrets est $O(n^2)$.

Avec la méthode de Lagrange, le problème est de trouver un polynôme qui passe par des points discrets $(x_i, f(x_i)) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x_i = x_j$ avec $i \neq j$, car la fonction $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ n'est pas définie en ces points. Nous proposons alors de joindre ces points par une droite verticale pour résoudre ce problème. Donc avec un contour discret, trouver un polynôme qui passe par tous les points discrets peut être difficile. Dans cette situation, le contour discret est découpé en plusieurs ensembles de points discrets E_k avec $k \in \{1, 2, \dots, m-1, m\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ où chaque E_k appartient à l'une des familles de contours discrets $\{C, C'\}$. C est une famille de contours discrets où les points discrets vérifient $x_i \neq x_j$ avec $i \neq j$ et C' est une famille de contours discrets tels que les points discrets vérifient $x_i = x_j$ avec $i \neq j$. La figure 4.23 présente un contour discret fermé, constitué d'un contour discret en vert et d'un autre en rouge qui permettent d'obtenir deux polynômes distincts et un segment de droite verticale, par reconstruction.

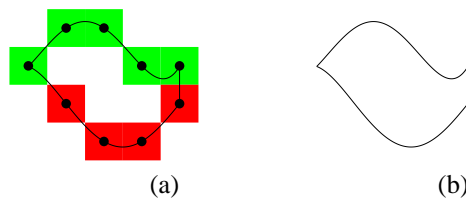


FIGURE 4.23 – Contour discret fermé

L'algorithme 4.3 générale suivant permet de réaliser la reconstruction polynomiale suivant la méthode de Lagrange :

Algorithme 4.3 Reconstruction polynomiale

Données en entrée : Soit $I = \{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_k\}$ un contour discret composé de k pixels.

Données en sortie : Polynômes issus de la reconstruction

Début

Décomposer I en contours discrets de la famille C ou C'

Pour chaque contour c de C

 déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange correspondant

Fin

Pour chaque contour c de C'

 déterminer la droite verticale associée

FinPour

Substituer le contour discret par les polynômes

Fin

Nous voyons alors comment un polynôme est obtenu à partir de points discrets. Cette technique de détermination d'un polynôme s'applique également à des grilles irrégulières isothétiques en considérant les barycentres des rectangles, comme des points discrets .

De cette manière, nous pouvons alors reconstruire les points discrets d'une droite naïve à l'aide d'un polynôme.

Le polynôme obtenu ne prend pas en compte l'épaisseur du contour discret. La détermination des polynômes passant par les sommets des pixels, permet d'encadrer le polynôme passant par le centre des pixels et d'obtenir ainsi une reconstruction polynomiale prenant en compte l'épaisseur du contour discret. La figure 4.24 montre des polynômes passant par des points continus des pixels.

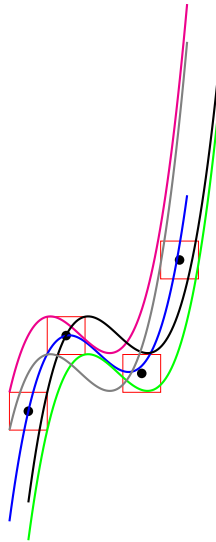


FIGURE 4.24 – *Polynômes passant par des points continus*

D'autres méthodes d'interpolation polynomiale comme la méthode de Newton peuvent être étudiés en perspective.

4.5 Conclusion

Nous avons proposé une extension de la transformée de Hough standard pour la reconnaissance de droites analytiques naïves et standard. Ce qui n'était pas encore proposé. Elle conserve les propriétés de la transformée de Hough standard comme la limitation de l'espace paramètres. La méthode peut être appliquée en modélisant l'espace de paramètres ou en sauvegardant le dual des pixels. La reconnaissance de droites discrètes est un problème classique. Les applications de la reconnaissance de droites discrètes sont nombreuses [120]. La section 4.2 de ce chapitre a été acceptée à la conférence SETIT 2012 et publié au journal IJASCA[31].

L'interpolation polynomiale de Lagrange a permis d'aboutir à la reconstruction polynomiale des points discrets.

En perspective, une analyse de la transformée de Hough standard étendue en dimension 3 ou supérieure pourra être étudiée et appliquée à des images concrètes, à grande échelle. La reconstruction polynomiale des pixels en se focalisant sur les points continus de chacun des pixels reste également à approfondir .

Conclusion générale

Cette thèse a été l'occasion d'aborder plusieurs centres d'intérêts de la reconnaissance de motifs et de la géométrie discrète, à savoir un aperçu sur la situation actuelle du niveau des connaissances informatiques sur l'image numérique, ses concepts de description et de reconnaissance des formes. La qualité de l'image numérique est souvent mauvaise à cause des bruits. Pour y remédier, nous avons proposé des méthodes qui portent sur l'extension du dual d'un pixel. Nous avons ainsi déterminé le dual d'un rectangle et d'un cercle pouvant avoir des application en reconnaissance de droites discrètes et en tracé de rayons.

De même, nous avons élaboré une nouvelle méthode de reconnaissance des droites analytiques basée sur l'application de la transformée de Hough standard. Cette méthode tout comme l'espace dual généralisé proposé par Martine Dexet[1], établit une reconstruction invertible et permet une limitation de la taille de l'espace de paramètres tout en gardant la même précision. L'extension de la transformée de Hough proposé a été l'objet d'un article accepté à la conférence Setit 2012 et publié au journal Ijasca volume 4 issue 3 en 2013[31].

En outre, nous avons proposé une extension de la médiatrice généralisée pour aboutir à une méthode de reconnaissance des cercles analytiques discrets, dans une image bruitée et dans un espace à grille irrégulière. Cette méthode possède certaines propriétés comme la symétrie centrale et orthogonale. Cette méthode a été l'objet d'un article accepté par la conférence Comp'Image 2010 et publié dans le proceeding.

L'application des méthodes précédentes permettra de rendre plus nette les images numériques bruitées.

En perspective, plusieurs travaux restent à réaliser comme :

- l'utilisation du dual d'un pixel sans approximation, de l'extension de la transformée de Hough standard, et la mise en oeuvre de la médiatrice généralisée en prenant en compte les travaux de

Eric Andres et al. [94, 96], notamment sur les propriétés de la médiatrice généralisée ;

- l'extension de la transformée de Hough standard présentée se situe dans un espace 2D ; alors comment peut-on l'étendre à des espaces de dimension supérieure ? une telle interrogation mérite d'être élucidée.
- la reconstruction polynomiale des points discrets avec les algorithmes de Lagrange et de Newton restent également à approfondir.
- dans le processus de la reconnaissance de formes, des filtres sont utilisés pour détecter les contours : quelle peut être alors l'incidence des filtres sur la reconnaissance des droites et cercles analytiques ?
- la définition analytique des courbes discrètes quelconques avec des descripteurs de contours, clairs doit être analysée pour aboutir par la suite à une nouvelle méthode de reconnaissance de formes qui résistera aux transformations et aux bruits.
- enfin, l'application de ces concepts en agronomie, pour reconnaître des motifs dans des plantations, des champs[68] et pour reconnaître des écritures imprimées en langue nationale comme le mooré, le dioula.

Ce sont là autant de pistes de recherche que nous pourrions approfondir ultérieurement.

Annexes

Les capteurs sont sensibles aux ondes électro-magnétiques. Ils possèdent certaines caractéristiques comme la résolution et le pavage utilisé. Suivant le type de capteurs et le type des ondes émises des caractéristiques particulières d'une image sont photographiées. En effet en imagerie médicale, en radiographie, nous obtenons des images numériques montrant des organes tels qu'un os ou un thorax en vue de détecter une tumeur ou une maladie. La tomodensitométrie ou scanner est une technique utilisée en imagerie médicale pour mesurer l'absorption des rayons x par les tissus. Le traitement de l'image est assuré par un ordinateur : l'image est scannée et reconstruite en dimension 2 ou 3.

En cartographie, les images aériennes nécessitent des capteurs de haute résolution pour représenter avec précision les éléments.

Détection des routes dans une image

Dans ce qui suit, nous mettons en évidence des droites discrètes dans une image. La figure 4.25 présente des images aériennes montrant des routes et des immeubles. Nous observons que les routes peuvent être conceptualisées comme des droites discrètes et les toits des building comme des rectangles. Plus l'on s'éloigne de la scène, l'épaisseur des droites discrètes diminue. Une route étant modélisée par deux droites discrètes parallèles, tend vers une droite discrète. Les toits des buildings sont des polygones rectangles, puis des points en fonction de la distance entre la scène et le capteur.

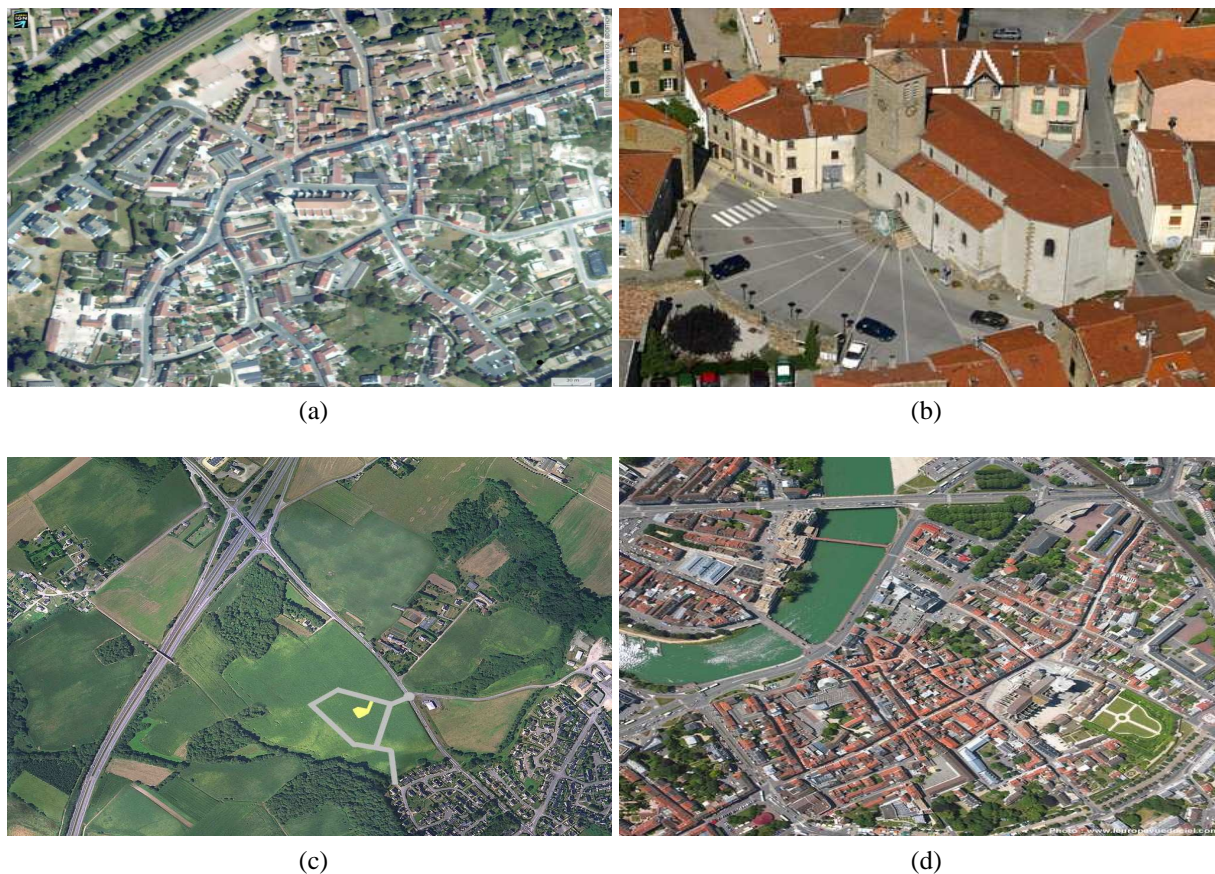


FIGURE 4.25 – *Images aériennes*(source : Google image)

Image en dimension 2 et 3

La figure 4.26 présente une image en dimension 2 en 4.26a et des images en dimension 3 en 4.26c et 4.26b. Dans certains domaines comme l'imagerie médicale notamment en échographie, les images en dimension 3 sont utilisées. Elles correspondent mieux à la représentation du monde réel.

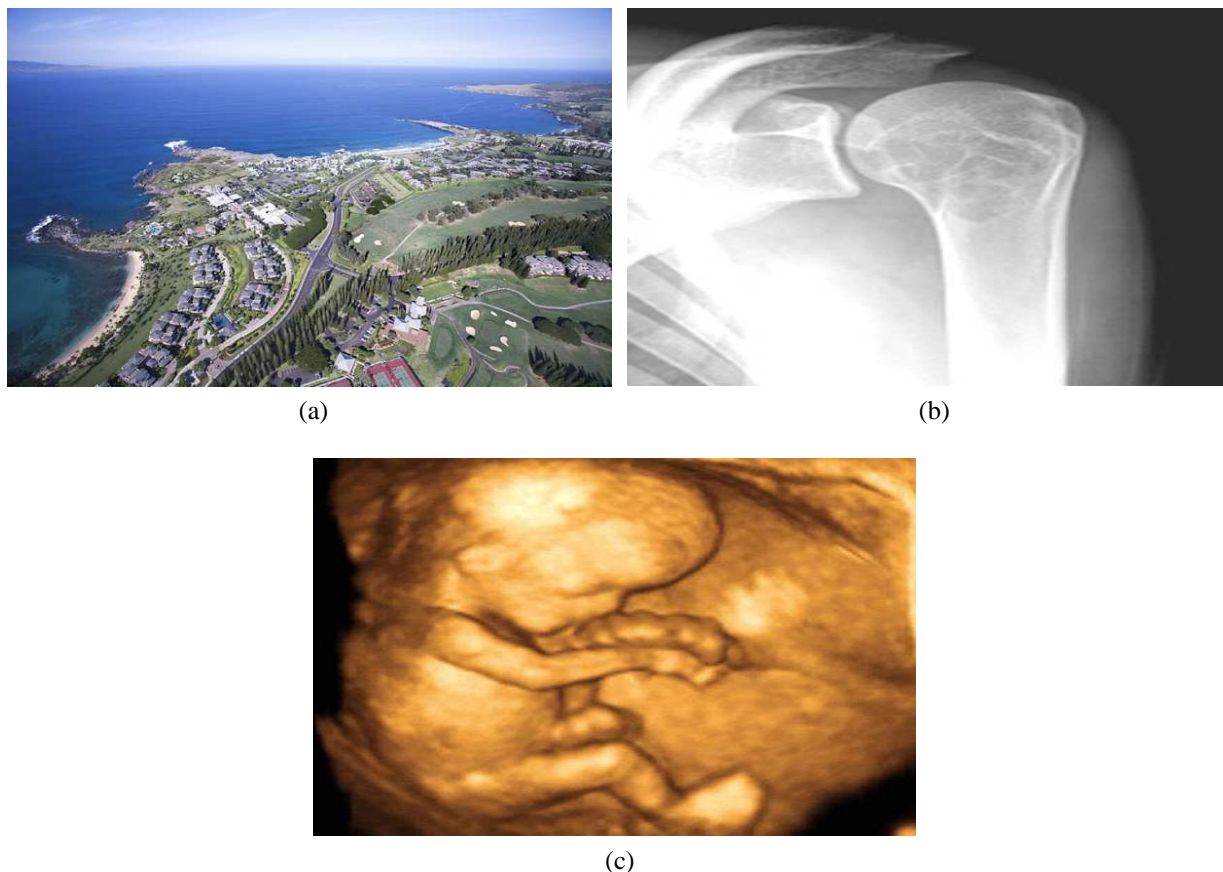


FIGURE 4.26 – Plusieurs types d'images numériques (source : Google image)

Une image est caractérisée par sa résolution qui définit le nombre de points discrets utilisés en ligne et en colonne. Le choix d'une résolution élevée permet d'avoir une meilleure représentation des objets et par la suite, d'avoir une bonne représentation des contours d'une image qui implique l'identification de formes géométriques.

Impact du changement de la résolution sur les périmètres

Les figures 4.27 et 4.28 illustrent l'impact de la résolution sur les périmètres et les surfaces discrets. En 4.27a, 4.27b, 4.27c, nous avons un cercle analytique discret : nous sélectionnons les pixels, dont le centre est situé entre les deux cercles continus. En 4.27d, 4.27e, 4.27f, nous avons un triangle discret, composé des pixels touchés par un triangle continu.

Impact du changement de résolution sur les surfaces

Les figures 4.28a, 4.28b, 4.28c représentent à des résolutions différentes, des aires discrètes associées à un trapèze continu : ces aires sont formées par des pixels dont le centre se trouve dans le trapèze continu. Il en est de même des figures 4.28d, 4.28e, 4.28f montrant l'aire discrète correspondant à un rectangle continu. Nous voyons ici la différence entre l'aire continue et l'aire discrète. Suivant un modèle de discrétisation donné, nous observons qu'avec une grande résolution les aires et les périmètres sont bien représentés. Nous observons également qu'avec une résolution moins élevée, l'image discrète associée n'est pas bien représentée. Notons que l'idéal en terme de représentation discrète est la représentation continue : la représentation discrète plus proche de la représentation continue adaptée est la meilleure.

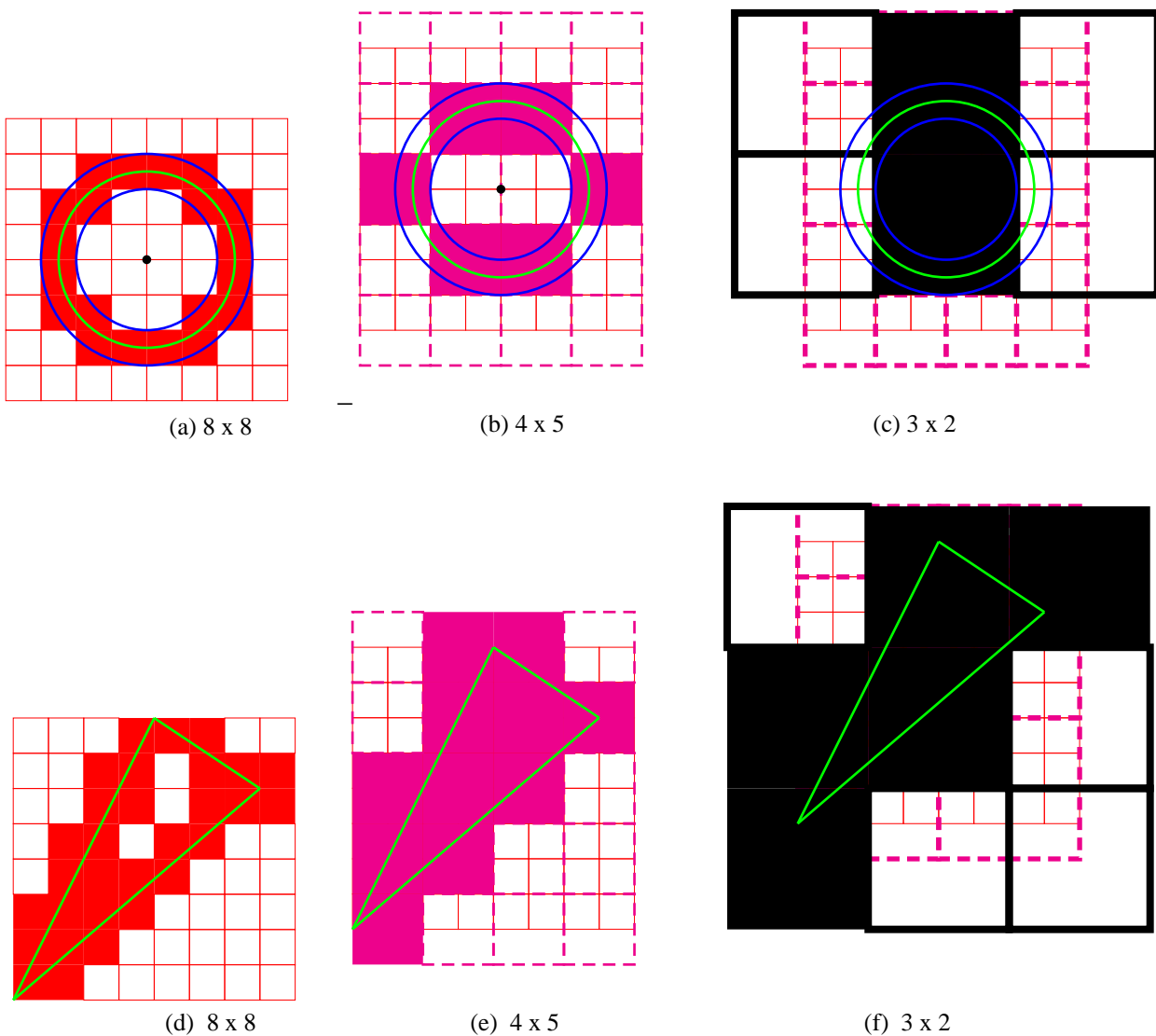


FIGURE 4.27 – Impact du changement de résolutions sur le périmètre

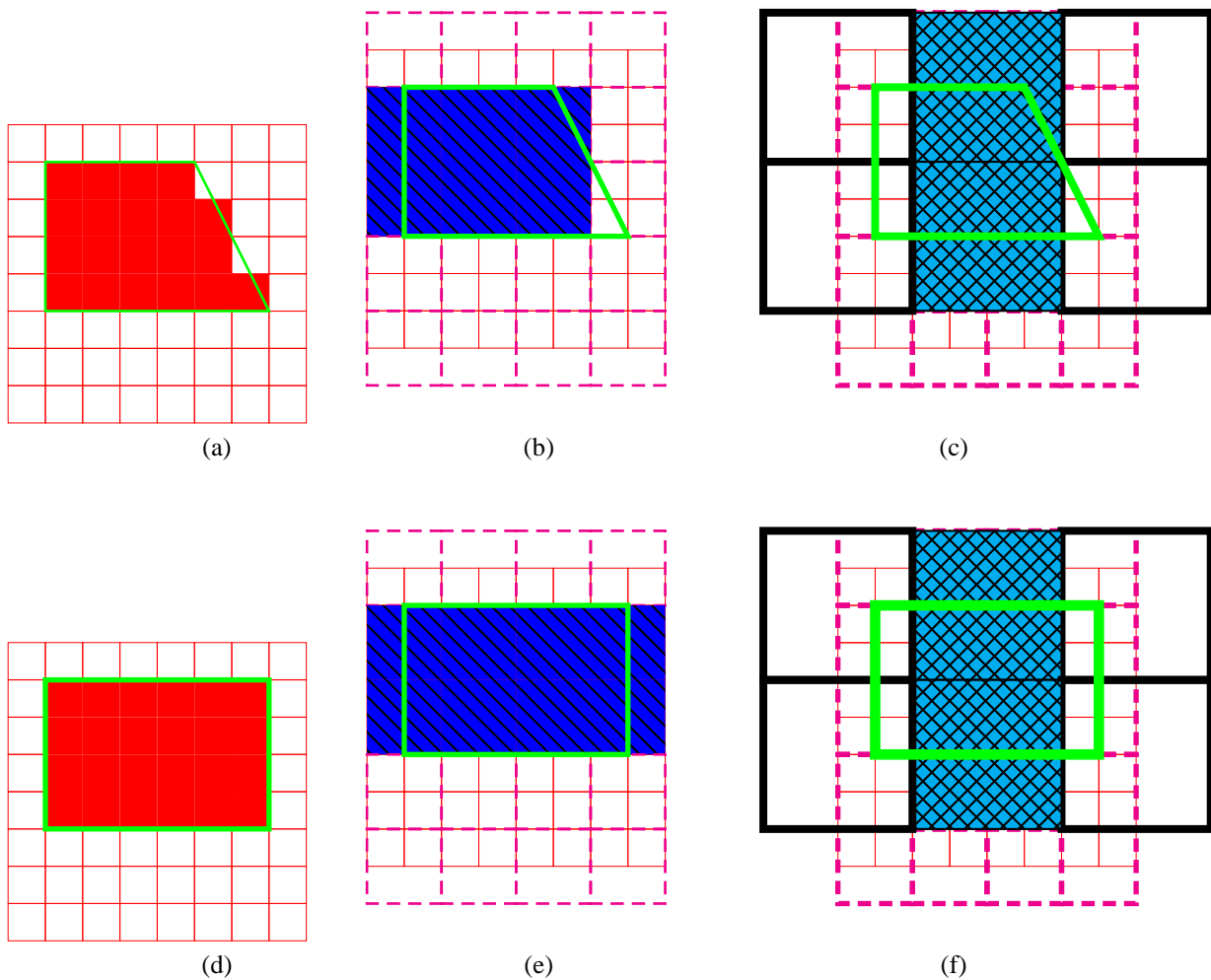


FIGURE 4.28 – *Impact du changement de résolution sur l'aire*

Image multi-échelle

Une image numérique multi-échelle est une image dont les composantes n'ont pas la même résolution. Comment procéder pour reconnaître une forme précise dans une telle image ? Nous analyserons cette question dans la section 1.4 aussi qu'aux chapitres 2 et 3. La figure 4.29 montre un cercle continu, où des arcs sont représentés dans des résolutions différentes illustrés en 4.29a et en 4.29b. Une application des structures multi-échelles en simulation est fournie par la figure 4.30.

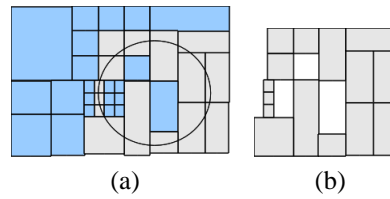


FIGURE 4.29 – *Un cercle continu traversant des structures rectangulaires*

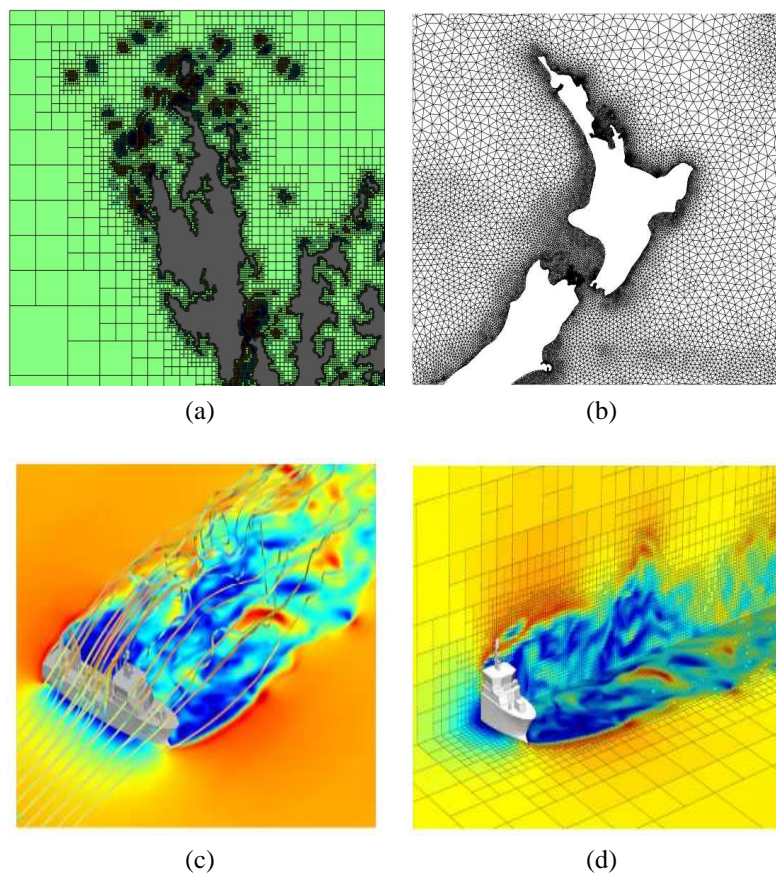


FIGURE 4.30 – *Simulation des eaux et du vent avec des structures multi-échelles [41]*

Image bruitée

En outre, une image peut être influencée par l'environnement lors de l'acquisition des données. L'environnement avec le brouillard, les rayons de soleil peuvent influencer la qualité des images

pouvant aboutir à des images bruitées avec des zones sombres. Il existe également des modèles en traitement d'image permettant d'injecter des bruits à divers degrés dans une image numérique.

La figure 4.31 met en évidence une image bruitée créée avec GIMP¹ : en 4.31a l'image originale et en 4.31b, l'image bruitée.



FIGURE 4.31 – *Image bruitée*

La figure 4.32 montre également des images floues en 4.32a et en 4.32b.



FIGURE 4.32 – *Images floues en 4.32a et en 4.32b(source : Google image)*

1. GIMP signifie GNU Image Manipulation Program est un programme de traitement d'images sous Ubuntu

Contours d'une image

L'analyse d'une image peut permettre de mettre en évidence des contours. Divers filtres tels que Sobel, Laplace, Canny ont été développés pour détecter des contours grâce à des masques. Ces filtres sont implantés dans les logiciels de traitements d'images.

La figure 4.33 montre un exemple d'extraction de contours par l'application des filtres de Laplace et de Sobel avec GIMP image Editor : en 4.33a nous avons une image initiale, en 4.33b les contours extraits avec le masque de Laplace, en 4.33c les contours extraits avec le masque de Sobel.



(a)



(b) Contours de Laplace



(c) Contours de Sobel

FIGURE 4.33 – *Contours extraits*

Liste des algorithmes

1.1	Liste des pointels	34
1.2	Tracé d'un hyperplan analytique discret	44
1.3	Tracé d'une hypersphère analytique discrète	48
2.1	Création d'une image bruitée	75
2.2	Reconnaissance des intersections des hyperplans analytiques	112
3.1	Calcul de la médiatrice généralisée	122
3.2	Reconnaissance d'une hypersphère analytique discrète.	130
3.3	Reconnaissance d'une hypersphère analytique	131
3.4	Calcul des rayons par rapport à un centre	132
4.1	Reconnaissance de droite naïve et standard	152
4.2	reconnaissance d'un hyperplan naïf, standard et supercouverture	154
4.3	Reconstruction polynomiale	159

Liste des tableaux

3.1	<i>Médiatrices et paraboles</i>	126
4.1	<i>Coordonnées de points d'intersection</i>	145
4.2	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$	146
4.3	$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$	146
4.4	$\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$	146
4.5	$\theta \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	147

Table des figures

1	<i>Organisation des chapitres</i>	7
1.1	<i>Étapes de la reconnaissance de formes</i>	9
1.2	<i>Plan et espace (Image générée avec POV-RAY)</i>	11
1.3	<i>Pavés non uniformes</i>	12
1.4	<i>Pavage régulier</i>	13
1.5	<i>Points discrets en dimension 2 en 1.5a et en dimension 3, en 1.5b</i>	13
1.6	<i>Un pixel en 1.6a, et un voxel en 1.6b</i>	14
1.7	<i>Pavés irréguliers</i>	15
1.8	<i>Grille irrégulière isothétique</i>	16
1.9	<i>Pavé isothétique en dimension 2 et 3</i>	16
1.10	<i>Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay</i>	19
1.11	<i>Pavage avec une transformation Quasi affine</i>	20
1.12	<i>Techniques de pavage tirées de [41]</i>	21
1.13	<i>Relation duale entre le pavage et le maillage</i>	22
1.14	<i>Décomposition d'une image en pavés</i>	23
1.15	<i>Voisinage en dimension 2</i>	24
1.16	<i>Voisinage en dimension 3</i>	24
1.17	<i>Voisinage en grille irrégulière isothétique en dimension 2</i>	25

1.18	<i>Voisinage en grille irrégulière isothétique en dimension 3</i>	25
1.19	<i>Changement d'intensité, entouré en rouge</i>	26
1.20	<i>Contours de Canny</i>	27
1.21	<i>Objets discrets construits avec plusieurs types de pavés.</i>	28
1.22	<i>Contours multi-échelles</i>	29
1.23	<i>Objets discrets</i>	30
1.24	<i>Correspondance entre des objets continus et des objets discrets</i>	31
1.25	<i>Codes de Freeman 0060060 d'un contour discret</i>	32
1.26	<i>Régions discrètes avec deux interprétations d'un contour discret</i>	32
1.27	<i>Structuration d'un point discret et contour de Khalimski-Kovalesky</i>	33
1.28	<i>Contour Khalimski-Kovalesky dans une grille irrégulière</i>	34
1.29	<i>Un k-Chemin en dimension 2 en 1.29a et un k-Chemin en dimension 3 en 1.29b</i>	35
1.30	<i>Un 0-arc en dimension 2, en 1.30a et un 2-arc en dimension 3, en 1.30b</i>	36
1.31	<i>k-courbe</i>	36
1.32	<i>Connexité en dimension 2, en 1.32a, et en dimension 3, en 1.32b</i>	37
1.33	<i>Composante connexe</i>	38
1.34	<i>Objet k-séparant</i>	38
1.35	<i>Tunnels en dimension 2</i>	39
1.36	<i>Tunnels en dimension 3</i>	39
1.37	<i>Droites analytiques</i>	43
1.38	<i>Plan analytique standard en 1.38a et plan analytique naïf en 1.38b.</i>	44
1.39	<i>Droite naïve diagonale</i>	45
1.40	<i>Cercles analytiques discrets $\Gamma((a,b), r)$ et d'épaisseur 1.</i>	47
1.41	<i>Cercles discrets analytiques dans une image</i>	49

1.42	<i>Quelques techniques de discrétisation</i>	51
1.43	<i>Courbe discrète analytique</i>	52
1.44	<i>Boule fermée</i>	53
1.45	<i>Discrétisation naïve et standard</i>	53
1.46	$\Gamma((1,1), 2.5)$ et $\omega=1$	54
1.47	<i>Un segment flou selon [113]</i>	55
1.48	<i>Transformée de Hough</i>	57
1.49	<i>dual d'un pixel</i>	60
1.50	<i>Préimage de trois pixels</i>	61
1.51	<i>Transformée de Hough standard</i>	62
1.52	<i>Droites discrètes obtenues par la transformée de Hough probabiliste en 1.52b.</i>	63
1.53	<i>Droites discrètes obtenues par la transformée de Hough standard en 1.53b.</i>	64
1.54	<i>Parabole</i>	66
1.55	<i>Formes quelconques</i>	67
1.56	<i>Formes analytiques quelconques</i>	68
2.1	<i>Courbe polynomiale</i>	73
2.2	<i>Épaisseur augmentée d'un cercle analytique</i>	74
2.3	<i>Image bruitée</i>	76
2.4	<i>Géométrie discrète floue</i>	77
2.5	<i>Courbe continue et courbe discontinue</i>	79
2.6	<i>Zone contenant des pavés absents</i>	80
2.7	<i>Composants de la zone contenant des pavés absents</i>	81
2.8	<i>Droite analytique épaisse bruitée</i>	82
2.9	<i>Droite standard bruitée : $-\frac{ 4 + 7 }{2} \leq 4x - 7y + 13.5 < \frac{ 4 + 7 }{2}$</i>	83

2.10 Cercle analytique discret bruité $\Gamma((1,1), 2.5)$ avec $\omega=1$	84
2.11 Pavés flous	84
2.12 Composants d'un pavé	85
2.13 Pavés flous dans une grille carrée	85
2.14 Droite analytique avec des pavés subdivisés.	86
2.15 Changement de repère	87
2.16 Droite analytique épaisse	88
2.17 Le dual du rectangle en 2.17a de sommets $(5,4)(0,4)(0,0)(5,0)$ est représenté en 2.17b	90
2.18 Le dual d'un rectangle subdivisé en carrés	90
2.19 Prémage de rectangles	91
2.20 Dual d'un disque	94
2.21 Cercle continu et son dual	95
2.22 Objet concave en 2.22a et son enveloppe convexe en 2.22b	96
2.23 Dual d'un pavé concave et de son enveloppe convexe	97
2.24 Prémage de cercles	98
2.25 Prémage de pavés concaves	99
2.26 Zone de passage des droites continues dans une droite standard	100
2.27 Prémage imbriquée	101
2.28 Champs poids	103
2.29 Deux droites analytiques parallèles	104
2.30 Deux droites analytiques sécantes	104
2.31 Droite analytique et segment continu	105
2.32 Intersection de droites analytiques	106
2.33 Cas d'intersection de deux droites continues dans une grille carrée	106

2.34	<i>Intersection de deux droites analytiques</i>	107
2.35	<i>Intersection de deux droites continues dans le cas d'une grille isothétique</i>	107
2.36	<i>Droites analytiques</i>	108
2.37	<i>Intersection de droites analytiques</i>	108
2.38	<i>Fonction f_1</i>	109
2.39	<i>Fonction f_2</i>	110
2.40	<i>Fonction composée $G=f_2 \circ f_1$</i>	110
2.41	<i>Préimage de trois pixels</i>	110
2.42	<i>Intersection des droites analytiques supercouvertures</i>	111
2.43	<i>Intersection de droites naïves</i>	111
3.1	<i>Transformée de Hough étendue d'un carré</i>	116
3.2	<i>Transformée de Hough étendue de deux carrés</i>	117
3.3	<i>Médiatrice de deux points continus et médiatrice généralisée</i>	118
3.4	<i>Médiatrices généralisées de deux régions</i>	119
3.5	<i>Médiatrice généralisée de deux régions.</i>	119
3.6	<i>Médiatrice généralisée de deux régions et une projection</i>	120
3.7	<i>Deux régions non disjointes</i>	120
3.8	<i>Positions de ω par rapport à une région pixel</i>	121
3.9	<i>Positions de ω par rapport à O_1 et O_2</i>	121
3.10	<i>Symétrie centrale et orthogonale</i>	123
3.11	<i>Zones symétriques</i>	124
3.12	<i>Exemple d'une médiatrice généralisée de deux disques</i>	124
3.13	<i>Parabole de foyer F</i>	125
3.14	<i>Courbes de la Médiatrice généralisée de deux pixels</i>	126

3.15 Aire de la Médiatrice généralisée de deux pixels	126
3.16 Cercle passant par trois régions pixels	127
3.17 Centres communs à plusieurs cercles traversant au moins deux régions(CC(R))	128
3.18 Intersection des médiatrices généralisées	129
3.19 Diagramme de classes	133
3.20 Médiatrice généralisée appliquée à des pavés bruités	133
4.1 Dual d'un segment	138
4.2 Extension de la Transformée de Hough standard	138
4.3 Segments d'un pixel	139
4.4 Segments horizontaux, verticaux et diagonaux d'un pixel	140
4.5 Côtés horizontaux	141
4.6 Côtés Verticaux	141
4.7 Diagonales	142
4.8 Extension de la transformée de Hough standard	143
4.9 dual d'un segment	145
4.10 dual d'un segment	145
4.11 Courbes sinusoïdales	146
4.12 Courbes sinusoïdales	149
4.13 Approximation de pixels	149
4.14 Courbes sinusoïdales	150
4.15 Points à l'intérieur des Courbes sinusoïdales	150
4.16 Préimage de trois pixels	151
4.17 Droites continues dans une image	152
4.18 Diagramme de classes du système	154

4.19	<i>Extension de la Transformée de Hough standard pour le rectangle</i>	155
4.20	<i>Préimage de rectangles</i>	156
4.21	<i>Transformée de Hough standard d'un triangle</i>	157
4.22	<i>Points discrets et reconstruction polynomiale</i>	158
4.23	<i>Contour discret fermé</i>	158
4.24	<i>Polynômes passant par des points continus</i>	160
4.25	<i>Images aériennes(source : Google image)</i>	164
4.26	<i>Plusieurs types d'images numériques(source : Google image)</i>	165
4.27	<i>Impact du changement de résolutions sur le périmètre</i>	166
4.28	<i>Impact du changement de résolution sur l'aire</i>	167
4.29	<i>Un cercle continu traversant des structures rectangulaires</i>	168
4.30	<i>Simulation des eaux et du vent avec des structures multi-échelles [41]</i>	168
4.31	<i>Image bruitée</i>	169
4.32	<i>Images floues en 4.32a et en 4.32b(source : Google image)</i>	169
4.33	<i>Contours extraits</i>	170

Publications personnelles

Conférences internationales

1. Marc Rodriguez, Sere Abdoulaye, Eric Andrès, Gaelle Largeteau Skapin, *Generalized perpendicular bisector and circumcenter*, In Proceeding CompIMAGE'10, Proceedings of the Second international conference on Computational Modeling of Objects Represented in Images, pages 1-10 (2010).
2. Abdoulaye SERE, Oumarou SIE, Eric ANDRÈS, *Extended standard Hough Transform for Analytical Line Recognition*. In International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), volume 4, issue 3, pages 256-266, (2013).
3. Abdoulaye SERE, Eric ANDRÈS, Oumarou SIE, *Detection of objects in multiscale noisy pictures based on analytical transforms*, 22nd International CODATA Conference : Scientific Data and Sustainable Development, Codata 2010, Afrique du Sud.(Présentation).

Workshops : posters

1. Abdoulaye SERE, Eric ANDRÈS, Oumarou SIE, *Detection of objects in multiscale noisy pictures based on analytical transforms*, Journée des doctorants de l'Université de Ouagadougou(JPO 2010)
2. Abdoulaye SERE, Eric ANDRÈS, Oumarou SIE, *reconnaissance d'objets discrets*, Journée des doctorants de l'Université de Ouagadougou, (JPO 2011).
3. Abdoulaye SERE, Eric ANDRÈS, Oumarou SIE, *Detection of objects in multiscale noisy pictures based on analytical transforms*, 22nd International CODATA Conference : Scientific Data and Sustainable Development, Codata 2010, Afrique du Sud.

Bibliographie

- [1] M.Dexet, *Architecture d'un modèleur géométrique à base topologique d'objets discrets et méthodes de reconstruction en dimensions 2 et 3*. Thèse en informatique, Université de Poitiers, France (2006).
- [2] J. Cha, R.H. Cofer, S.P. Kozaitis, *Extended Hough transform for linear feature detection*. In *Pattern Recognition*, volume 39, issue 5, pages 1034-1043 (2006).
- [3] C. Galambosy, J. Matas, J. Kittler, *Progressive probabilistic Hough transform Progressive probabilistic Hough transform for line detection*. In *Computer Vision and Pattern Recognition, IEEE Computer Society Conference on*, volume 1, (1999).
- [4] D.Ballard, *Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes*. In *Pattern Recognition*, volume 13, pages 111–112 (1981).
- [5] D.Ballard, *Hierarchical generalized Hough transform and line segment based generalized Hough transforms*. In *pattern recognition*, volume 15, pages 277–285 (1982).
- [6] E. Andres, *Discrete linear objects in dimension n : the standard model*. In *Graphical Models*, volume 65, issue 1-3, pages 92–111 (2003).
- [7] S.El Mejdani, R.Egli, *Champs de hauteur de la transformée de hough Standard*. In *actes de 4ième Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle, Marrakech, Morocco*, pages 133-144 (2005).
- [8] N.Kiryati, Y.Eldar, A. M. Bruckstein, *A probabilistic hough transform*. In *Pattern Recognition*, volume 24, issue 4, pages 303–316 (1991).
- [9] H. Maître, *Un panorama de la transformée de hough - a review on hough transform*. In *traitement du signal*, volume 2, issue 4, pages 305–317 (1985).
- [10] J.-P. Reveillés, *combinatorial pieces in digital lines and planes*. In *proceeding SPIE 2573, Vision Geometry*, volume IV, issue 23(1995).

- [11] E. Andres, R. Acharya, C. Sibata, *Discrete analytical hyperplanes*. In Graphical Model and Image processing, volume 59, issue 5, pages 302-309 (1997).
- [12] Eric Andres, Marie-Andrée Jacob, *The Discrete Analytical Hyperspheres*. In IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, volume 3, issue 1, pages 75-86 (1997).
- [13] Daisheng Luo, Xiaohai He, Qizhi Teng, Qingchuan Tao, *Triplet circular Hough transform for circle detection* in Journal of electronics (China), volume 19, Issue 4, pages 356-362(2002).
- [14] Agathe CHOLLET, *Formalismes non classiques pour le traitement informatique de la topologie et de la géométrie discrète*, Thèse de mathématique, Université de la Rochelle, (2010)
- [15] J-P Reveilles, géométrie discrète, *calcul en nombres entiers en algorithmique*. Thèse d'état, University Louis Pasteur, Strasbourg (1991)
- [16] J.Françon, *Discrete combinatorial surfaces*. In Graphical Models and Image Processing, volume 57, issue 1, pages 20–26(1995)
- [17] Richard O. Duda, Peter E. Hart, *Use of the Hough Transformation to detect lines and curve in pictures*. In Communications of the ACM, volume 15, issue 1, pages 11-15(1972).
- [18] Peter E. Hart, *How the Hough Transform was Invented ?* In Signal Processing Magazine, IEEE, volume 26 , issue 6, pages 18-22 (2009).
- [19] Wolfgang Nieman, Norbert Harle, *Improving the angular accuracy for a fast window based Hough Transform*
- [20] P. V. C Hough, *Method and means for recognizing complex patterns*. In U. S. Patent 3069654, (1962).
- [22] Chia A, Leung M, Eng H, Rahardja S. *Ellipse detection with hough transform in one dimensional parametric space*. In ICIP, IEEE International Conference on, volume 5, pages 333–336 (2007).
- [23] Lu W, Tan J. *Detection of incomplete ellipse in images with strong noise by iterative randomized Hough transform (IRHT)*. In Pattern Recognition, volume 41, issue 4, pages 1268–1279 (2008).
- [24] Huang C.L. *Elliptical feature extraction via an improved hough transform*. In Pattern Recognition Letters, volume 10, Issue 2, pages 93–100 (1989).
- [25] Daul C, Graebing P, Hirsch E. *From the Hough Transform to a New Approach for the Detection and Approximation of Elliptical Arcs*. In Computer Vision and Image Understanding, volume 72, Issue 3, December 1998, pages 215–236 (1998).

- [26] D.H. Ballard, "*Generalizing the Hough Transform to Detect Arbitrary Shapes*". In Pattern Recognition, volume 13, number 2, pages 111-122 (1981).
- [28] J.E. Bresenham, *Ambiguities in Incremental Line Rastering*. In Computer Graphics and Applications, IEEE, volume 7, issue 5, pages 31-43. (May 1987)
- [29] E. Andres, Ph. Nehlig, J. Françon, *Supercovers of Straight Lines, Planes and Triangles*, In Proceeding DGCI '97, Proceedings of the 7th International Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery, Pages 243-254 (1997)
- [31] Abdoulaye SERE, Oumarou SIE, Eric ANDRÈS, *Extended standard Hough Transform for Analytical Line Recognition*. In International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA), volume 4, issue 3, pages 256-266 (2013).
- [32] J.E. Bresenham, *Algorithm for computer control of a digital plotter*. In IBM systems Journal, volume 4, issue 1, pages 25-30 (1965).
- [33] Freeman H, *Computer processing of line-drawing images*. In ACM computing surveys ; volume 6, issue 1, pages 57-97(1974).
- [34] Rosenfeld A, *Digital straight lines segments*. In IEEE Transactions on computers, pages 1264-1369(1974).
- [35] J.E. Bresenham, *A linear Algorithm for Incremental digital display of circular arcs*. In communication of the ACM, volume 20, issue 2, pages 100-106(1997).
- [37] Pham S, *Digital circles with non-lattices point centers*. In The Visual Computer, volume 9, issue 1, pages 1-24, (1992).
- [38] McIlroy M, *Best approximate circles on integer grids*. In ACM Transactions on Graphics, volume 2, issue 4, pages 237-263(1983).
- [39] Christophe Fioro, Jean-Luc Toutant, *Arithmetic Discrete hypersphere and Separatingness*. In Proceeding DGCI'06 Proceedings of the 13th international conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, pages 425-436 (2006).
- [40] Yu Wing Hong W. *Memory efficient circle and Ellipse Detection algorithm in Digital Images*, In Systems, Man and Cybernetics, Intelligent Systems for the 21st Century, IEEE International Conference on, volume 5, pages 4262 - 4267(1995).
- [41] Antoine Vacavant, *Géométrie discrète sur grilles irrégulières isothétiques*. Thèse en informatique, Université Lumière Lyon 2(2007).

- [42] Soo-Chang Pei, Ji-Hwei Horng, *Circular arc detection based on Hough transform*. In Pattern Recognition Letters, volume 16, issue 6, pages 615-625 (1995).
- [43] H. Kalviainen, P. Hirvonen, L. Xu, E. Oja, *Probabilistic and non-probabilistic Hough transforms : overview and comparisons*. In Image and Vision Computing, volume 13, issue 4, pages 239–252 (1995) .
- [44] Kouros Khoshelham, *Extending Generalized Hough Transform to Detect 3D Objects In Laser Range Data*. In ISPRS Workshop on Laser Scanning 2007 and SilviLaser 2007, Espoo, finland, pages 12-14(2007).
- [45] LORENSEN W. E., C LINE H. E, *Marching cubes : a high resolution 3D surface construction algorithm*. In SIGGRAPH, Computer Graphics (ACM), volume 21, pages 163-169 (1987).
- [46] DEBLED-RENNESON I., REVEILLÈS J.-P. *A linear algorithm for segmentation of digital curves*. In International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, volume 9, issue 6, pages 635-662(1995).
- [47] Tristan Roussillon, Laure Tougne, Isabelle Sivignon, *On Three Constrained Versions of the Digital Circular Arc Recognition Problem*. In Proceeding DGCI'09, Proceedings of the 15th IAPR international conference on Discrete geometry for computer imagery, Pages 34-45(2009).
- [48] Coeurjolly D., Tougne L., Gerard Y., Reveillès J.-P., *An Elementary Algorithm for Digital Arc Segmentation*. In Electronic Notes in Theoretical Computer Science, IWCIA 2001, 8th International Workshop on Combinatorial Image Analysis, volume 46, Pages 355–370(2001).
- [49] Damaschke Peter, *The Linear Time Recognition of Digital Arcs*. In Pattern Recognition Letters, volume 16, issue 5, pages 543–548 (1995).
- [50] Mark de Berg , Otfried Cheong, M. van Kreveld, Marc van Kreveld, Mark Overmars, *Computation geometry, algorithms and applications*. Computational Geometry : Algorithms and Applications 3rd edition, springer(2008).
- [51] Efrat A., Gotsman C., *Subpixel Image Registration Using Circular Fiducials*. In International Journal of Computational Geometry and Applications, volume 4, issue 4, pages 403–422 (1994).
- [52] S. Fisk. *Separating points sets by circles, and the recognition of digital disks*. In IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 8, issue 4, pages 554–556(1986).

- [53] Kim C.E., *Digital Disks*. In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 6, issue 3, pages 372–374 (1984).
- [54] Kim C.E., Anderson T.A., *Digital Disks and a Digital Compactness Measure*. In Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 117–124 (1984).
- [55] V. A. Kovalevsky. *New définition and fast recognition of digital straight segments and arcs*. In Proceedings of the tenth international conference on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 2, pages 31–34(1990).
- [56] Thanh Phuong Nguyen, *Etude des courbes discrètes : applications en analyse d'images*. Thèse en informatique, Université de Henri Poincaré – Nancy 1(2010).
- [57] Oscar Figueiredo, *Advances in Discrete Geometry Applied to the Extraction of Planes and surfaces from 3D Volumes*. Thèse en informatique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne(1999).
- [58] Farouki R.T., Johnstone J.K.m *Computing point/curve and curve/curve bisectors*. In Fisher, R.B., edition, The Mathematics of Surfaces V. Oxford University, Oxford, pages 327–354 (1994).
- [59] Matin Peternell, *Geometric properties of bisector surfaces*. In Graphical Models ; volume 62, issue 3 , pages 202–236 (2000).
- [60] M.Dexet, E.Andres, *A generalized preimage for the digital analytical hyperplan reconigition*, In Journal Discrete Applied Mathematics, volume 157, Issue 3, pages 476-489(2009).
- [61] Joseph O'Rourke, S. R. Kosaraju, N. Megiddo, *Computing circular separability*. In Discrete and Computational Geometry, volume 1, issue 1, pages 105–113(1986).
- [62] P. Sauer. *On the recognition of digital circles in linear time*. Computational Geometry : Theory and Application, volume 2, issue 5, pages 287–302(1993).
- [63] M. Worring, W.M. Smeulders. *Digitized circular arcs : characterization and parameter estimation*. In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 17, issue 6, pages 587–598(1995).
- [64] S. M. Thomas, Y. T. Chan. *A simple approach for the estimation of circular arc center and its radius*. In Computer Vision, Graphics and Image Processing, volume 45, pages 362–370(1989).
- [65] A. Rosenfeld, J. Ornelas, and Y. Hung, *"Hough Transform Algorithms for Mesh-Connected SIMD Parallel Processors,"*, In Computer Vision, Graphics and Image Processing, volume. 41, number 3, pages 293-305(1988).

- [66] A. Nakamura and K. Aizawa. *Digital circles*. In Computer Vision, Graphics, and Image Processing, volume 26, issue 2, pages 242–255 May (1984).
- [67] Bertrand Kerautret, Jaques Oliver Lachaud, Thanh Phuong NGUYEN, *Circular arc reconstruction of digital contours with chosen Hausdorff error*, In Proceeding DGCI'11 Proceedings of the 16th IAPR international conference on Discrete geometry for computer imagery Pages 247-259 (2011) .
- [68] G. Jones, *Modélisation d'images agronomiques application à la reconnaissance d'adventices par imagerie pour une pulvérisation localisée*. Thèse en informatique, Université de Bourgogne(2009).
- [69] J. Lopez-Krahe, T. Alamo-Cantarero, E. Davila-Gonzalez, *Discrete Hough Transform Applied to Small Size Pattern Recognition*, éditeur Télécom(1994).
- [70] Agnès Desolneux, Lionel Moisan, Jean-Michel Morel, *From Gestalt Theory to Image Analysis A Probabilistic Approach*, éditeur springer(2008).
- [71] M. Peternell, H. Pottmann, T. Steiner, *Hough Transform and Laguerre Geometry for the Recognition and Reconstruction of Special 3D Shapes*. Technical Report 100, Institute of Geometry(2003).
- [72] Harvey Rhody, Chester F. Carlson, *Hough Circle Transform*, Center for Imaging Science, Rochester Institute of Technology (2005).
- [73] Ajdari Rad Ali, Faez Karim, Qaragozlou Navid, Sun Changming, Talbot Hugues, Ourselin Sebastien, Adriaansen Tony, *Fast Circle Detection Using Gradient Pair Vectors*. In Proceedings of the Seventh International Conference on Digital Image Computing : Techniques and Applications, pages 879-888 (2003).
- [74] Alain Bretto, Luc Gillibert, *Hypergraph-Based Image Representation*. In Proceeding GbR-PR'05, Proceedings of the 5th IAPR international conference on Graph-Based Representations in Pattern Recognition, Pages 1-11 (2005).
- [75] Ioannou D., Huda W., Laine A. *Circle recognition through a 2d hough transform and radius histogramming*. In Image and Vision Computing, volume 17, issue 1, pages 15–26 (1999).
- [76] Robert A. McLaughlin, *Randomized Hough Transform : Improved Ellipse Detection with Comparison*. In Pattern Recognition Letters, volume 19, issues 3–4, pages 299–305(1998).
- [78] N Kiryati, Y Eldar, A M Bruckstein, *Probabilistic Hough transform*. In Pattern Recognition, volume 24, issue 4, pages 303–316(1991).

- [79] Thanh Phuong Nguyen, Isabelle Debled-Rennesson, *Arc segmentation in linear time*. In Proceeding CAIP'11, Proceedings of the 14th international conference on Computer analysis of images and patterns, volume Part I, pages 84-92(2011).
- [80] P. Nehlig. *Applications Affines Discrètes et Antialiasage*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg (1992).
- [81] P. Nehlig. *Applications quasi-affines : pavages par images réciproques*. In Journal Theoretical Computer Science, volume 156, issues 1–2, pages 1–38 (1996).
- [82] Marie-Andrée Jacob-Da Col, P. Tellier, *Quasi-linear transformations and discrete tilings*. In Journal Theoretical Computer Science, volume 410, issues 21-23, pages 2126-2134(2009).
- [83] Laurent Rineau. *Maillages de volumes bornés par des surfaces lisses lisses par morceaux*. Thèse de doctorat en sciences, Université Paris VII, Paris, France(2007).
- [84] Etienne Bertin, *Diagrammes de Voronoi 2D et 3D, applications en analyse d'images*. Thèse en Mathématiques appliquées, Université Joseph Fourier-Grenoble 1, (2006).
- [85] D. Coeurjolly. *Supercover model and digital straight line recognition on irregular isothetic grids*. In Discrete Geometry for Computer Imagery, volume 3429, pages 311-322, (2005).
- [86] E. Andres. *Modélisation analytique discrète d'objets géométriques*. Thèse d'habilitation, Université de Poitiers, France(2000).
- [87] J.-P. Reveillès. *Structures des droites discrètes*. In Journées mathématique et informatique, Marseille-Luminy(1989).
- [88] Marc Rodriguez, *Redimensionnement adaptatif et reconnaissance de primitives discrètes*. Thèse en informatique, Université de Poitiers(2011).
- [89] R. Breton. *Reconstruction inversible d'objets discrets 2D*. Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, France, 2003.
- [90] I. Sivignon, R. Breton, F. Dupond and E. Andres, *Discrete analytical curve reconstruction without patches*. In Images and vision computing, volume 23, issue 2, pages 191-202(2005).
- [91] C. E. Kim. *Digital Disks*. In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 6, issue 3, pages 372–374(1984).
- [92] C. E. Kim, T. A. Anderson. *Digital Disks and a Digital Compactness Measure*. In Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pages 117–124(1984).
- [93] J. O'Rourke, S. R. Kosaraju, and N. Meggido. *Computing Circular Separability*. In Discrete and Computational Geometry, volume 1, pages 105–113(1986).

- [94] Andres E. , Rodriguez M., Largeteau-Skapin G., *Generalized Perpendicular Bisector and exhaustive discrete circle recognition*, Graphical Models, volume 73, issue 6, pages 346-353 (2011).
- [95] B. Joppin. D.Guinin, F. Aubonnet. *Précis de mathématiques*, Tome 5, Géométrie 3ème édition, Bréal, Rosny Press, 1994.
- [96] A. Richard, G. Largeteau-Skapin, M. Rodriguez, E. Andres, L. Fuchs, D.J. S. Ouattara. *Properties and Application of the Simplified Generalized Perpendicular Bisector*. In Proceeding DGCI'11, Proceedings of the 16th IAPR international conference on Discrete geometry for computer imagery(Springer-Verlag), Pages 296-307(2011).
- [97] T. M. van Veen and F. C. A. Groen, *Discretization errors in the Hough transform* : In Pattern Recognition, volume 14, numbers 1-6, pages 137-145(1981).
- [98] I. D. Svalbe, *Natural representations for straight lines and the Hough transform on discrete arrays*. In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 11, issue 9, pages 941-950(1989).
- [99] H. Maître, *"Contribution to the prediction of performances of the Hough transform*. In IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, volume 8, issue 5, pages 669-674(1986).
- [100] Niback W, Petkovic D, *On improving the accuracy of the Hough Transform*, In Machine Vision and Applications, volume 3, issue 2, pages 87-106(1990).
- [101] XU L. , OJA E., *Randomised Hough Transform(RHT) : basic mechanism, algorithms, and computational complexities*. In CVGIP volume 57, number 2 Pages 131-154 (1993).
- [102] T. Roussillon, I. Sivignon, and L. Tougne. *Test of Circularity and Measure of Circularity for Digital Curves*. In International Conference on Image Processing, Computer Vision and Pattern Recognition, pages 518–524(2008).
- [103] J. L. Coatrieux, C. Barillot, *A survey of 3D display techniques to render medical data*. 3D Imaging in Medicine (K. H. Hohne, H. Fuchs, and S. K. Pizer, Eds.),Springer-Verlag, pages 175–195(1990).
- [104] A. Pommert and al, *3D-Imaging in Medicine*, Encyclopedia of Computer Science and Technology, Volume 28, Suppl. 13, pages 341–370(1993).

- [105] L. Adams, Krybus W., Meyer-Ebrecht D., Rueger R., Gilsbach J.M., Moesges R., Schloendorff G., *Computer assisted surgery*. In IEEE transactions on Computer Graphics and Applications, volume 10, issue 3, pages 43–51(1990).
- [106] R. Yagel, D. Cohen, A. Kaufman, *Discrete ray tracing*, In IEEE transactions on Computer Graphics and Applications, volume 12, issue 5, pages 19–28(1992) .
- [107] D. Cohen and A. Shaked, *Photo-realistic imaging of digital terrains*. In Computer Graphics Forum, volume 12, number 3, pages 363–373(1993).
- [108] Sodien Touj, Najoua Essoukri Ben Amara, Hamid Amiri, *reconnaissance de l'écriture arabe imprimée par transformée de Hough généralisée*. In Proceedings of CIFED'04, La Rochelle, pages 267- 271(2004).
- [109] Isabelle Debled-Rennesson, Jean-Luc Rémy, Jocelyne Rouyer-Degli, *Segmentation of Discrete Curves into Fuzzy Segments*. rapport de recherche N° 4989, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (2003).
- [110] Marzieh. Savoj, S. Amirhassan. Monadjemi, *Iris Localization using Circle and Fuzzy Circle Detection Method*, In World Academy of Science, Engineering and Technology, Volume 61 (2012).
- [111] Mohammadreza Jooyandeh, Ali Mohades, Maryam Mirzakhah, *Uncertain Voronoi diagram*. In Journal Information Processing Letters, volume 109, issue 13, pages 709-712(2009).
- [112] Subhransu Maji, Jitendra Malik, *Object detection using a max-margin Hough transform*. CVPR 2009, pages 1038-1045(2009).
- [113] Isabelle Debled-Rennesson, *Eléments de Géométrie Discrète Vers une Etude des Structures Discrètes Bruitées*, Habilitation à diriger des recherches, Université Henri Poincaré – Nancy I(2007).
- [114] Marc Rodríguez, Gaëlle Largeteau-Skapin, Eric Andres. *Adaptive pixel resizing for multiscale recognition and reconstruction*. In Proceeding IWCIA '09 Proceedings of the 13th International Workshop on Combinatorial Image Analysis, pages 252 - 265(2009).
- [115] Marc Rodríguez, Gaëlle Largeteau-Skapin, Eric Andres, *Adaptive pixel size reconstruction with topological control*. In Proceeding IWCIA '09 Proceedings of the 13th International Workshop on Combinatorial Image Analysis, pages 252-265(2009).
- [116] Marc Rodríguez, Gaëlle Largeteau-Skapin, Eric Andres, *Local non-planarity of three dimensional surfaces for an invertible reconstruction : k-cuspal cells*. In Proceeding ISVC '08 Pro-

- ceedings of the 4th International Symposium on Advances in Visual Computing, pages 925-934(2008).
- [117] C. T. Zahn, R. Z. Roskies. *Fourier descriptors for plane closed curves*. In IEEE Transactions on Computers, volume 21, issue 3, pages 269–281(1972).
- [118] D. Zhang and G. Lu. *Study and evaluation of different Fourier methods for image retrieval*. In Image and Vision Computing, volume 23, issue 1, pages 33–49(2004).
- [119] T. Pavlidis. *A review of algorithms for shape analysis*. In Computer Graphics and Image Processing, volume 7, issue 2, pages 243–258, (1978).
- [120] P.Pousset, J. Lopez-kraze, R.H. Cofer. *Transformée de hough discrète et bornée, application à la détection de droites parallèles et du réseau routier*. Colloque TIPI, 5-N°4, 1988. éditeur Grets, Saint Martin d’Hères, France(1988).
- [121] Helly, E. : *Über mengen konvexer körper mit gemeinschaftlichen punkten*. In Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, volume 32. pages 175– 176 (1923).
- [122] A. Rosenfeld. *The fuzzy geometry of image subsets*. In Pattern Recognition Letters, volume 2, issue 5, pages 311-317(1984).
- [123] Dorin Andrica, Liana Topan, *Analytic Geometry*, Cluj University Press, (2004).
- [124] Jean-Marie Monier, *Géométrie MPSI, MP, cours et 350 exercices corrigés*, 3ème édition(2003).
- [125] L. Guo, O.Chutatape, *Influence of discretization in image space on hough transform*. In Pattern Recognition, volume 32, issue 4, pages 635–644(1999).
- [126] Marc Rodriguez, Sere Abdoulaye, Eric Andrès, Gaëlle Largeteau-Skapin, *Generalized perpendicular bisector and circumcenter*, In Proceeding CompIMAGE’10, Proceedings of the Second international conference on Computational Modeling of Objects Represented in Images, pages 1-10 (2010).
- [127] Yuen H. K., Princen J., Illinworth J., Kittler J, A *Comparative study of Hough Transform methods for circle finding*, In Image and vision computing, volume 8 number 1, (1990).
- [128] S. H. Y. HUNG, *On the straightness of digital arcs*. In IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence(PAMI), volume 7, issue 2, pages 203-215(1985).
- [129] V. Kovalevsky. *Digital geometry based on the topology of abstract cell complexes*. In Discrete Geometry for Computer Imagery, pages 259–284(1993).
- [130] Jean-Marie Monier, *Analyse MPSI, cours et 1000 exercices corrigés*, 4ième édition. Dunod, 907 pages(2004).

- [131] S. Bourgeois, S. Naudet-Collette, M. Dhome, *Descripteur de contours pour la reconnaissance d'objets*. In ORASIS (2005).
- [132] A.A. KASSIM, T.Tan, K.H.Tan, *A comparative study of efficient generalised hough transform*. In Image and Vision Computing, volume 17, issue 10, pages 737–748(1999).
- [133] Franck Jedrzejewski, *Introduction aux méthodes numériques*, Springer, 2ème edition (2005).
- [134] David Coeurjolly. *Algorithmique et Géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces*, Thèse en informatique, Université Lumière Lyon 2, France(2002).

